30.08.21

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד ב' – תשפ"א

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=2 \\ x+(a^2-a)z=2 \\ x-ay+(2a^2-a)z=2 \\ x-ay+a^2z=a^2-3a+4 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-a & 2 \\ 1 & -a & 2a^2-a & 2 \\ 1 & -a & a^2 & a^2-3a+4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & 2 \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{array}\right)$$

שימו לב – עוד לא ברור אם המטריצה מדורגת, כי אין אנו בטוחים מי הם האיברים הפותחים.

נבדוק מתי האיברים הראשונים בשורות שונים מאפס, ונתחיל מזה שיגרום לשורת סתירה.

$$a^2-3a+2=0$$

$$a_{1,2}=1,2$$

אם $a\neq 1,2$ השורה הרביעית היא שורת סתירה, ואין פתרון!

נבדוק מה קורה כאשר $a=1$ וכאשר $a=2$.

נציב $a=1$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זו מטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

נציב $a=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

שוב המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, כל המשתנים תלויים ולכן פתרון יחיד.

ב. מצאו את הפתרון הכללי למערכת המשוואות עבור $a=1$

על מנת למצוא את הפתרון נדרג קנונית, נתחיל מהמצב אליו הגענו בסעיף קודם:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים $z=t$

$$x=2$$

$$y=t$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$(2,t,t)=(2,0,0)+t(0,1,1)$$

ג. מצאו פתרון למערכת המשוואות עבור $a=2$

שוב נחזור למטריצה אליה הגענו ונדרג קנונית.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1-4R_3 \\ R_2+R_3}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

אין משתנים חופשיים:

$$x=2$$

$$y=0$$

$$z=0$$

והפתרון היחיד הוא $(2,0,0)$.

<u>שאלה 2</u> נביט בהעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$T(0,1,0) = (1,-1,-3)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,1)$$

לפני שנפתור נשים לב שנתונים כל התמונות של הוקטורים הסטנדרטיים, ואם נשים אותם בעמודות נקבל את המטריצה המייצגת:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

א. קבעו האם ההעתקה T הפיכה, ואם כן מצאו את $T^{-1}(x,y,z)$

תזכורת: העתקה הפיכה אם ורק אם המטריצה המייצגת הפיכה, וההופכית מיוצגת על ידי המטריצה ההופכית.

ננסה להפוך את המטריצה המייצגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

כעת, אפשר לחלק במינוס 2 את השורה האמצעית כך שהאיבר הפותח שלה יהיה שווה 1 ונוכל לאפס באמצעותו, אבל אז יהיה לנו שברים. לא נורא, אבל בואו נראה טריק (למתקדמים בלבד) שיתחמק מזה (לפחות כרגע).

$$\xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

ולכן

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

הערה: על מנת לבדוק אם צדקנו צריך לחשב את

$$[T] \cdot [T]^{-1} = I$$

זה אכן המצב, וכעת נסיים את השאלה:

$$T^{-1}(x,y,z) = [T^{-1}]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T]^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - z \\ -3x + 3y - 2z \end{pmatrix}$$

ב. מצאו את $T(0,0,3)$ ואת $T^{-1}(0,0,3)$

אפשר פשוט לכפול במטריצה המייצגת ובמטריצה ההופכית:

$$T(0,0,3) = [T]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הערה, ניתן גם לחשב את ערך זה בדרך נוספת:

$$T(0,0,3) = 3 \cdot T(0,0,1) = 3 \cdot (0,1,1) = (0,3,3)$$

וכעת

$$T^{-1}(0,0,3) = [T^{-1}]\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-3 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

ג. חשבו את $[T]^2$

$$[T]^2 = [T] \cdot [T] = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\-3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

ד. מצאו את $T\big(T(x,y,z)\big)$

$$T\big(T(x,y,z)\big) = [T] \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\-3 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+z\\-y\\-3x-2z\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3</u>

א. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^5 = -1$

$$z^5 = cis(\pi)$$

$$z_k = \sqrt[5]{1} \cdot cis\left(\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right)$$

כאשר $k = 0,1,2,3,4$

ב. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^5 - z^2 = 0$

$$z^2(z^3 - 1) = 0$$

לכן $z^2 = 0$ או $z^3 = 1$

ל $z^2 = 0$ יש פתרון יחיד $z = 0$

ועבור $z^3 = 1$ יש שלושה פתרונות שונים:

$$z^3 = cis(0)$$

הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[3]{1} cis\left(\frac{0 + 2\pi k}{3}\right)$$

כאשר $k = 0,1,2$

סה"כ הפתרונות הם $0, cis(0), cis\left(\frac{2}{3}\pi\right), cis\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

ג. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $(1+i)z = (1-i)^6 + i$

ראשית, על מנת להעלות בחזקת 6, נעבור לצורה הקוטבית

$$z = 1 - i$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

כיוון ש $Re(z) > 0$ מתקיים כי

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

סה"כ

$$1 - i = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן

$$(1-i)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 cis\left(-\frac{6\pi}{4}\right) = 8cis\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

עד כה

$$(1+i)z = 8cis\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i$$

כעת על מנת לחבר את שני המרוכבים בצד הימני של המשוואה, נחזור לצורה האלגברית!

$$(1+i)z = 8i + i = 9i$$

כעת על מנת לחלק במקדם של z, נכפול ראשית בצמוד המרוכב $(1-i)$

$$2z = 9i(1-i) = 9i + 9$$

$$z = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i$$

<u>שאלה 4</u> לכל אחד מן התחומים הבאים, חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D (x \cdot y)dxdy$

א. $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

קל קלי תחום מלבני!

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xydy\right)dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^1\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ב. $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, -\sqrt{1-y}\le x\le \sqrt{1-y}\}$

זה תחום שאינו מלבני, אבל נתון בצורה שאפשר לדעת מה גבולות האינטגרציה.

האם צריך או כדאי להחליף סדר אינטגרציה? נראה אולי בהמשך

$$\iint_D xydxdy=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}xydx\right)dy$$

כאשר אנו מתלבטים האם להחליף סדר אינטגרציה, שתי השאלות המרכזיות הן:

1. האם אנחנו יודעים לחשב את האינטגרל לפי המשתנה הראשון (במקרה זה התשובה היא כן)

2. האם הביטוי שנקבל אחרי האינטגרציה נעים לנו, כי גבולות האינטגרציה עשויים להיות מסובכים. (ספציפית בתרגיל זה, שורש לא הכי נחמד אבל גם לא הכי גרוע, ומעבר לזה האינטגרל יצא בריבוע ויבטל את השורש!)

סה"כ בתרגיל זה לא נחליף את סדר האינטגרציה

$$\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}xydx=\left[\frac{yx^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}=\frac{y}{2}\left((1-y)-(1-y)\right)=0$$

סה"כ $\iint_D xydxdy=0$

ג. $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

יש לנו מעגל, נחליף לקואורדינטות קוטביות

$$x=rcos(\theta)$$

$$y=rsin(\theta)$$

במעגל היחידה המלא התחום של הרדיוס הוא $r\in[0,1]$ ותחום הזוית הוא $\theta\in[0,2\pi]$

ולכן

$$\iint_D xydxdy=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}rcos(\theta)rsin(\theta)\cdot rd\theta\right)dr=$$

$$=\int_0^1\left(r^3\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right)dr$$

אפשר לפתור את האינטגרל הפנימי לפי הצבה או באמצעות הזהות $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$

נלך כאן על ההצבה:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta=\begin{Bmatrix}t=\sin(\theta)\\ dt=\cos(\theta)\,d\theta\end{Bmatrix}=\int_{\sin(0)=0}^{\sin(2\pi)=0}tdt=0$$

וסה"כ, שוב, התשובה היא

$$\iint_D xydxdy=0$$