# הומומורפיזם של חבורות

### הגדרה

בהינתן שתי חבורות G,H, העתקה $\varphi: G \to H$ נקראת הומומורפיזם(הומ') אם
$$\forall g,h \in G \quad \varphi(g * h) = \varphi(g)\varphi(h)$$

### הערה

מכאן והילך בקורס, $gh = g * h$(נשמיט את *)

### דוגמאות

1) $G = GL_n(\mathbb{R}), H = \mathbb{R}^*$
נגדיר העתקה $\varphi: G \to H$ ע"י $\forall A \in G\ \varphi(A) = \det A$. לפי משפט המכפלה של דט.:
$$\forall A, B \in G, \varphi(AB) = \det(AB) = \det A \det B = \varphi(A)\varphi(B)$$
2) V,W מעל $\mathbb{F}$
הם מהווים חבורות אבליות ביחס לחיבור וקטורים.
תהא $T: V \to W$ העתקה לינארית. מתקיים $\forall u, v \in V\ T(u + v) = Tu + Tv$, כלומר הע"ל היא הומ'.
3) תהא G חבורה כלשהי. $H = \{e\}$ חבורה הטריוויאלית.
נגדיר $\varphi: G \to H$ ע"י $\forall g \in G\ \varphi(g) = e$.
מתקיים $\forall g, h \in H\ \varphi(gh) = e = e \cdot e = \varphi(g)\varphi(h)$
4) תהא G חבורה. $a \in G$. נגדיר $\varphi: \mathbb{Z} \to G$ ע"י $\forall n \in \mathbb{Z}\ \varphi(h) = a^n$, כאשר $a^0 = e$, $a^{-k} = (a^{-1})^k$ עבור k טבעי. אזי $\varphi$ הומ'

### טענה 1

תהיינה G,H חבורות(חב'). $\varphi: G \to H$ הומ'. $e_G$ יחידה של G, $e_H$ יחידה של H. אזי $\varphi(e_G) = e_H$
[כלומר הומ' מעביר יחידה ליחידה]

### הוכחה

יהא $x \in G$.
$$\varphi(x) \underset{\substack{e_G \text{ יחידה} \\ \text{ב}G}}{=} \varphi(xe_G) \underset{\varphi \text{ הומ'}}{=} \varphi(x)\varphi(e_G)$$
קיבלנו $\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e_G)$
$\varphi(x) \in H$, H חב', לכן יש לו הפכי בH, $\varphi(x)^{-1}$.
נכפיל את שני האגפים משמאל ב$\varphi(x)^{-1}$ ונקבל $\varphi(x)^{-1}\varphi(x) = \varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(e_G)$
$$e_H = e_H\varphi(e_G) = \varphi(e_G)$$
■

### הגדרה – איזומורפיזם

תהיינה G,H חב', $\varphi: G \to H$ איזומורפיזם(איז') אם $\varphi: G \to H$ הומ'(של חבורות) ו-$\varphi$ העתקה חח"ע ועל.

החבורות $G, H$ איזומורפיות אם קיים איז' $\varphi: G \to H$ ואז נסמן $G \cong H$

### דוגמאות

1) העתקת הזהות: $\varphi: G \to G$, $\forall g \in G\ \varphi(g) = g$ היא איז'.
2) $G = \mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0)$, $\mathrm{H} = (\{r \in \mathbb{R}: r > 0\}, \cdot, 1)$
נגדיר $\varphi: G \to H$ ע"י $\forall r \in \mathbb{R}\ \varphi(r) = 2^r$.
האם $\varphi$ הומ'?
$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}\ \varphi(r_1 + r_2) = 2^{r_1 + r_2} = 2^{r_1} 2^{r_2} = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$
כלומר $\varphi$ הומ'.
כמו כן, $\varphi$ חח"ע ועל:
<u>על</u>: לכל $a \in A$, כלומר $a > 0$ ממשי, יש מקור והוא $\log_2 a$.
<u>חח"ע</u> כי $\varphi(x) = 2^x$ פונ' מונוטונית עולה ממש.
3) נגדיר <u>חבורת החזקות של a</u>. (a אות פורמלית)
אבריה: מכפלות מאורך סופי של a ו-$a^{-1}$, עם הכלל ש-$a^{-1}a = aa^{-1} = e$ והכפל=שרשור.

### תרגיל

זו חבורה אבלית אינסופית. למשל $x = aa, a^{-1}a^{-1}a^{-1}a = y$, $xy = a$,
$$xy = aaa^{-1}a^{-1}a^{-1}a = e$$

סימון: $\langle a \rangle$. $\langle a \rangle = \{e, a, aa, aaa, \dots\} \cup \{a^{-1}, a^{-1}a^{-1}, a^{-1}a^{-1}, a^{-1}, \dots\}$
נקראת גם: החבורה החופשית באות אחת.

### עובדה

$$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$$

### הוכחה

נגדיר העתקה $\varphi: \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$ ע"י $\varphi(0) \coloneqq e$, עבור n טבעי $\varphi(n) \coloneqq \underbrace{a \dots a}_{n \text{ פעמים}}$,
$$\varphi(-n) \coloneqq \underbrace{a^{-1} \dots a^{-1}}_{n \text{ פעמים}}$$

## עובדה 1

יש חבורה אחת בלבד עד כדי איזו' מסדר 1.

### חבורות מסדר 2:

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ עם חיבור מודולו 2.
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ החבורה הסימטרית על 2 אותיות.

<u>תרגילון</u>: יש חב' אחת בלבד מסדר 2
<u>תרגילון</u>: יש חב' אחת בלבד מסדר 3

<u>תרגיל</u>: יש יותר מחב' אחת מסדר 4