אלגברה מופשטת 2 - תרגיל בית 3

1. יהי R חוג ללא יחידה. נגדיר $\hat{R} = R \times \mathbb{Z}$. נגדיר כפל ב $\hat{R}$ ע"י $(n, x)(m, y) = (nm, nx + my + xy)$.
הראו ש $\hat{R}$ הוא חוג עם יחידה, וש $x \mapsto (0, x)$ הוא שיכון חוגים-ללא-יחידה. תארו את האידאלים של $\hat{R}$.

2. יהי I אידאל בחוג לא קומוטטיבי R כך ש $ab - ba \in I$ לכל $a, b \in R$. הראו ש R / I חוג קומוטטיבי.

3. הראו שאם $f : F \to R$ הומ' על משדה לחוג, אזי R הוא שדה.

4. יהי R חוג ויהי I אידיאל של R הוכיחו כי $M_n(R) \big/ M_n(I) \cong M_n\left(R \big/ I\right)$.

5. יהי $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ עם פעולות הכפל והחיבור של מטריצות.

א. הראו ש S הוא תת חוג של $M_2(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו כי $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$ אידיאל בחוג S.

ג. הראו שחוג המנה $S \big/ I$ איזומורפי לחוג $\mathbb{R}$ (בפעולות הרגילות).

6. הוכיחו כי $\mathbb{C}[x, y] \big/ \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle \cong \mathbb{C}[x, y] \big/ \langle xy - 1 \rangle$.

7. חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידיאל $0 \neq I \triangleleft R$ כך ש $I^2 = 0$.
אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R / P הוא חוג ראשוני למחצה. הוכח כי $P \triangleleft R$ ראשוני למחצה אם ורק אם לכל $a \in R$, אם $aRa \subseteq P$ אז $a \in P$.

8. חוג קומ' A נקרא בולאני אם $x^2 = x$ לכל $x \in A$. הראו שבחוג כזה מתקיים:
   a. $2x = 0$ לכל $x \in A$.
   b. כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.
   c. A / m הוא שדה בעל שני איברים לכל אידאל מקסימלי m.
   d. כל אידאל נוצר סופית הוא אידאל ראשי.