מבנים אלגבריים - תירגול 6

30 באפריל 2019

תהא G חבורה. H ת"ח תקרא נורמלית אם לכל g מתקיים $gH = Hg$.
משפט: H נורמאלית אמ"מ לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} = H$ אמ"מ לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} \subseteq H$ אמ"מ לכל $g \in G$ מתקיים $ghg^{-1} \in H$.
במקרה ש H נורמאלית $G/H = \{gH | \, g \in G\}$ היא חבורה ונקראת חבורת המנה (הפעולה היא $gH \cdot g'H = gg'H$).
תרגיל: הוכיחו כי ב S_4 הת"ח $K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ נורמאלית.
פתרון: לכל $\sigma \in S_4$ ולכל $(i_1, i_2)(i_3, i_4) \in K$ כך $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1,2,3,4\}$ (עבור $id \in K$ ברור שמתקיים $\sigma id \sigma^{-1} = id \in K$) מתקיים כי

$$\sigma (i_1, i_2)(i_3, i_4) \sigma^{-1} = \sigma (i_1, i_2) \sigma^{-1} \sigma (i_3, i_4) \sigma^{-1} = (\sigma[i_1], \sigma[i_2])(\sigma[i_3], \sigma[i_4]) \in K$$

כאשר השיוויון האחרון הוא משיעורי בית. והשייכות ל K היא כיוון ש σ חח"ע ולכן $\{\sigma[i_1], \sigma[i_2], \sigma[i_3], \sigma[i_4]\} = \{1,2,3,4\}$.
הערה: כיוון ש ${}^{S_4}/_{K}$ עם 6 איברים ולא קומטטיבית נקבל כי $S_3 \cong {}^{S_4}/_{K}$ כי יש חבורה יחידה (עד כדי איזומ') מסדר 6 שאינה קומטטיבית.
דוגמא: $G = S_3$ התת חבורה $H = \{id, (1,2)\}$ אינה נורמאלית כי עבור $h = (1,2) \in H$ ו $g = (1,3) \in G$ מתקיים כי

$$g^{-1}hg = (1,3)(1,2)(1,3) = (2,3) \notin H$$

דגש על הצורך בנורמליות בהגדרת הפעולה לעיל: אכן הפעולה שהגדרנו לעיל על קוסטים (כאשר היה מדובר בתת חבורה נורמלית), לא מוגדרת היטב כאן. כי מתקיים $(1,2,3)H = (1,3)H, (3,2,1)H = (3,2)H$, ואז אם נייקח את הנציגים $(1,3), (2,3)$, נקבל: $(1,3)H \star (2,3)H = (1,3)(2,3)H = (3,2,1)H$, ואילו אם ניקח את הנציגים $(1,2,3), (3,2,1)$ נקבל בפעולה: $(1,2,3)H \star (3,2,1)H = (1,2,3)(3,2,1)H = H$. לכן הפעולה לא מוגדרת היטב.
דוגמא: בחבורה G חילופית כל תת חבורה נורמאלית. למשל $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Q}$ חבורת המנה היא

$${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} = \{q + \mathbb{Z} : \, q \in \mathbb{Q}\}$$

הוכח או הפרך: תהא G חבורה סופית אזי קיים n כך ש $\forall g \in G \, g^n = e$
הוכחה: ניקח $n = |G|$
הוכח או הפרך: תהא G חבורה בה כל איבר מסדר סופי אזי קיים n כך ש $\forall g \in G \, g^n = e$
הפרכה: ב ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ כל איבר מסדר סופי אבל לא קיים n כנ"ל.
תרגיל: $A_n \lhd S_n$.
פתרון: מתקיים כי $\frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$. לפיח משפט בהרצאה נקבל כי A_n נורמאלית.