תרגיל 1

9 באוגוסט 2017

1. הוכיחו או הפריכו:
   א. $(A \to B) \to (B \to A) \equiv A \vee \neg B$.
   ב. הפסוק $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$ הוא טאוטולוגיה.
   ג. הפסוקים $p \wedge (q \vee r)$ ו־ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ שקולים.

2. בחרו נכון או לא נכון ונמקו:
   א. כאשר השמש זורחת כל התרנגולים קוראים.
   ב. כאשר התרנגול שלי, קוקי, קורא, השמש זורחת.
   מסקנה: השמש זורחת $\Longleftrightarrow$ כל התרנגולים קוראים.

3. איזה מבין הבאים שקול לשלילת המשפט: לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.
   א. לכל טבח לא קיים מאכל שהוא מכין טעים.
   ב. קיים טבח שלא קיים מאכל שהוא מכין טעים.
   ג. לא קיים טבח.
   ד. קיים טבח כך שקיים מאכל שהוא מכין טעים.
   ה. קיים טבח שקיים מאכל שהוא מכין לא טעים.
   ו. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין לא טעים.
   ז. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין טעים.
   ח. לא לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.
   ט. לכל מאכל קיים טבח שהוא מכין אותו לא טעים.

4. א. מעל הממשיים, מצאו פרדיקט Q עבורו הפסוק

$$\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \forall y \exists x Q(x,y) \to \forall x \exists y (Q(x,y) \wedge Q(y,x))$$

לא בהכרח נכון.

ב. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "נחמד" אם הפסוק

$$\exists a \in \mathbb{Z} : [P(a) \to P(a+1)]$$

בעל ערך $TRUE$. הוכיחו או הפריכו: כל פרדיקט הוא נחמד.

ג. כיתבו פסוק שקול לפסוק הבא ללא שימוש בקשר השלילה:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Q}.\ \forall y \in \mathbb{Q}.\ ((y^2 < 2 \to x > y) \wedge (\forall \varepsilon > 0.\ \exists z \in \mathbb{Q}.\ (z^2 < 2 \wedge z > x - \varepsilon))))$$

מותר להשתמש בסימנים המופיעים בפסוק המקורי בלבד (למעט בקשר השלילה כמובן) ובנוסף בפרדיקט $\leq$.

5. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{lll} X_3 = \{a, \{\{a\}\}\} & X_2 = \{a, \{a\}\} & X_1 = \{\{a\}\} \\ X_6 = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\} & X_5 = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\} & X_4 = \{\{a\}, \{\{a\}\}\} \end{array}$$

אילון מהטענות הבאות נכונות:

א. $X_1 \in X_2$

ב. $X_1 \subseteq X_2$

ג. $X_2 \in X_6$

ד. $X_2 \subseteq X_3$

ה. $X_3 \subseteq X_4$

ו. $X_4 \subseteq X_5$

ז. $X_5 \in X_6$

ח. $X_5 \subseteq X_6$

6. בכל סעיף מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את תנאי הסעיף:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \nsubseteq C$.

ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ אבל $B \nsubseteq C$.

ג. $A \in B, B \in C, A \notin C$.

ד. $A \in B, B \in C, A \in C$

ה. $A \in B, A \subseteq B$

7. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל שתי קבוצות X, Y אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup (Y \setminus X) = Y$.

ב. $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

ג. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

ד. $\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$

8. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{n}{2}] & n \text{ is even} \\ [-\frac{n-1}{2}, 0] & n \text{ is odd} \end{cases}$$

כאשר $[a,b]$ הוא הקטע הסגור בממשיים. עוד נגדיר $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$.

א. מצא את $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

ב. מצא את $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

ג. מצא את $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. הוכח תשובתך.

ד. מצא את $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. הוכח תשובתך.

בהצלחה!