תרגול 12:

ניתן להשתמש במשפט השארית גם כדי לחשב אינטגרלים של פונקציות טריגו'.

תרגיל: חשבו $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta} d\theta$

פתרון: נעשה הצבה $z=e^{i\theta}$ ואז הקטע $0\le\theta\le 2\pi$ עובר למעגל היחידה $|z|=1$. כמו כן $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$. ניתן לרשום $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}$ ולקבל

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+3\left(\frac{z+1/z}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{4}{4+3\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{4+3z^3+6z+\frac{3}{z}}$$

$$= \frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{3z^4+10z^2+3}$$

לאינטגרנד יש קטבים בנקודות $z^2 = \frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10\pm 8}{6} = -\frac{1}{3},-3$ כלומר $z=\pm i\sqrt{1/3},\pm i\sqrt{3}$. עלינו לחשב את השארית רק בנקודות $z=\pm i\sqrt{1/3}$ כי הן בתוך המעגל.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{3z^4+10z^2+3}, i\sqrt{1/3}\right) = \left.\frac{z}{12z^3+20z}\right|_{z=i\sqrt{1/3}} = \left.\frac{1}{12z^2+20}\right|_{z=i\sqrt{1/3}} = \frac{1}{-12/3+20} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

השארית השנייה יוצאת אותו דבר. $I = 2\pi i\frac{4}{i}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right) = \pi$.

הערה: באופן כללי ניתן לפתור כך אינטגרלים מהצורה $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$. ההצבה $z=e^{i\theta}$ מביאה את הקטע $[0,2\pi]$ (וגם כל קטע אחר באורך 2π) אל מעגל היחידה $|z|=1$. בנוסף, $\cos\theta = \frac{z+1/z}{2}, \sin\theta = \frac{z-1/z}{2i}$. כך שהאינטגרל נהייה $\oint_{|z|=1} F\left(\frac{z+1/z}{2},\frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$ ואותו ניתן לחשב ע"י משפט השארית.

שימוש נוסף של משפט השארית הוא חישוב אינטגרלים לא אמיתיים מהסוג $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ או אפילו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\alpha x)dx$. נשתמש במשפטים הבאים:

משפט (חישוב אינטגרלים של פונקציות רציונליות)

תהי $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ עבור P,Q פולינומים ממעלה m,n בהתאמה. אם $Q(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, ו- $n\geq m+2$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}(f,z_k)$ כאשר $z_1,z_2,...,z_N$ הן הנקודות הסינגולריות של f בחצי המישור העליון.

תרגיל: חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$. ברור שהנקודות הסינגלריות שלה הן קטבים, בנקודות $i,-i,2i,-2i$. כמו כן הריבוי של כל אחד מהם הוא אחד כי $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$. הקטבים הרלוונטיים לנו הם רק $i,2i$. ע"פ המשפט (שתנאיו מתקיימים) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,2i)\right)$.

לצורך חישוב השארית נביא למה קטנה.

למה: אם ל- $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ יש קוטב פשוט בנקודה z_0, כלומר $\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)=0$ ניתן לחשב את השארית ע"י $\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

הוכחת הלמה:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\psi(z)-\psi(z_0)}\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\frac{1}{\psi'(z_0)}\varphi(z_0).$$

נחזור לחישוב. $\operatorname{Res}(f,i)=\left.\frac{1}{2z(z^2+4)+(z^2+1)2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{6i}$

$\operatorname{Res}(f,2i)=\left.\frac{1}{2z(z^2+4)+(z^2+1)2z}\right|_{z=2i}=-\frac{1}{12i}$. סכום השאריות הוא $\frac{1}{12i}$ וכפול $2\pi i$ מקבלים $\frac{\pi}{6}$.

תרגיל נוסף: $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^3}dx$

פתרון: קודם כל זה לא אינטגרל מהסוג שאנחנו מכירים, אבל אפשר לתקן כי האינטגרנד הוא זוגי.

כלומר $\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+4\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+4\right)^3}dx$. נגדיר $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^3}$. לפונקציה זו שני קטבים בנקודות $\pm 2i$, וכל אחד מהם בריבוי 3. הקוטב הרלוונטי הוא $2i$. ניתן לחשב את השארית ע"י הנוסחה היותר מסובכת. $\operatorname{Res}(f,2i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-2i)^3 f(z)\right]$ ויוצא $-\frac{3i}{512}$. אם כך ע"פ המשפט $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+4\right)^3}dx=\frac{3\pi}{256}$. האינטגרל המקורי הוא חצי מזה, כלומר $\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+4\right)^3}dx=\frac{3\pi}{512}$

נצטט את המשפט הנוסף, אך לא נפתור תרגילים מהסוג כאן:

משפט (חישוב אינטגרלים של פונקציות רציונליות כפול סינוס/קוסינוס)

יהיו P,Q פוליונומים ממעלה m,n בהתאמה, כך שמתקיים $n\ge m+1$, ו- $Q(x)\ne 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

אם $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ עבור $\alpha>0$ אז $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(\alpha x)dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}(f,z_k)\right]$

ו- $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(\alpha x)dx=\operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}(f,z_k)\right]$ [אם לא נלמד PV לנסח מחדש]

נעבור למשפט רושה, שנותן דרך למצוא כמה אפסים יש לפונקציה בתחום מסוים.

משפט: יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ. יהיו f,g אנליטיות ב- $\overline{D}$, ונניח שעל השפה γ מתקיים $\left|f(z)-g(z)\right|<\left|g(z)\right|$, אזי:

א. $f(z)\ne 0$ וגם $g(z)\ne 0$ על γ.

ב. ל- f ול- g אותו מספר אפסים ב- D (כולל ריבוב).

תרגיל ממבחן:

נגדיר $f(z)=z^4-4z^3+8z-2$. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל- $f(z)$ בתוך העיגול $\{z\in\mathbb{C}:|z|<3\}$. הצדיקו את תשובתכם.

פתרון: הגישה המומלצת היא לקחת הדומיננטי על השפה $g(z)=$. במקרה הזה זה יוצא $g(z)=-4z^3$ שכן על השפה שבה $|z|=3$, מתקיים $\left|g(z)\right|=4|z|^3=4*3*3*3=108$. נשים לב שעל השפה מתקיים

$\left|f(z)-g(z)\right|=\left|z^4+8z-2\right|\le|z|^4+8|z|+2\le 3^4+8*3+2=107<108=\left|g(z)\right|$ מכאן של-

f יש 3 אפסים בעיגול, כמספר האפסים של g.