בוחן בפונקציות מרוכבות

יש לפתור 3 מתוך 4 שאלות. משקל כל סעיף 17 נקודות. יש לנמק היטב את תשובותיכם.

1. (א) תהי $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה שלמה המקיימת

$$u(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

מצאו את כל האפשרויות עבור $v(x,y)$ ובטאו את $f(x,y)$ לפי z.
פתרון: נחפש צמוד הרמוני.

$$u_x = 2x + y = v_y$$

ולכן

$$v = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C(x)$$

משוואת קושי רימן השנייה נותנת:

$$-u_y = -x + 2y = v_x = 2y + C'(x)$$

כלומר

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

ולכן

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C$$

ולכן

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + xy - y^2 + i(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 - \frac{1}{2}i(x^2 + 2xy - y^2) + iC \\ &= (x+iy)^2 - \frac{1}{2}i(x+iy)^2 + iC = (1 - \frac{1}{2}i)z^2 + iC \end{aligned}$$

(ב) חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר n. (תזכורת: z נקרא שורש יחידה מסדר n אם $z^n = 1$)
פתרון: יש כמה דרכים לחשב. הדרך הכי ישירה: להבין ששורש יחידה מסדר n הוא מהצורה $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ כאשר $k = 0, 1 \ldots, n-1$. ואז המכפלה של כולם היא

$$e^{\frac{2\pi i0}{n}} \cdots e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} = e^{\frac{2\pi i0}{n} + \ldots + \frac{2\pi i(n-1)}{n}}$$

לפי הנוסחא לסכום סדרה חשבונית זה שווה ל

$$e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}\frac{n}{2}} = e^{\pi i(n-1)} = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ -1 & n \text{ even} \end{cases}$$

וזאת התשובה.

דרך אחרת: נסמן את שורשי היחידה מסדר n ב $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. אלה בדיוק שורשי הפולינום $z^n - 1$, ולכן אחד מהם ריבוי 1 (יש יש לכל היותר n שורשים) ולכן

$$(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n) = z^n - 1$$

אם נשווה בשני האגפים את המקדם החופשי נקבל

$$(-\alpha_1)\cdots(-\alpha_n) = -1$$

$$(-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n = -1$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ -1 & n \text{ even} \end{cases}$$

ושוב הגענו לאותה תוצאה.

2. (א) מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\sin z = \cos z$.

פתרון: לפי ההגדרה של הפונקציות הטריגונומטריות המשוואה היא בעצם

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

נכפול שני אגפים ב ie^{iz} ונקבל

$$e^{2iz} - 1 = ie^{2iz} + i$$

$$(1-i)e^{2iz} = 1 + i$$

$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

כלומר

$$2iz = \frac{\pi}{2}i + 2\pi ik \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

במילים אחרות, השוויון מתקיים בדיוק איפה שהוא מתקיים עבור הפונקציות הממשיות (אין נקודות "חדשות" בהן השוויון מתקיים).

(ב) תנו דוגמא לענף רציף של הלוגריתם (על תחום כלשהוא) בו השוויון

$$\log\frac{1}{z} = -\log z$$

לא מתקיים

פתרון: ניקח את התחום $D = \mathbb{C}\backslash\{t \mid t \geq 0\}$ ונסכל על הענף

$$L(z) = \ln|z| + i\arg_L(z)$$

כאשר

$$\arg_L(z) \in (0, 2\pi)$$

כעת ניקח את $z = i$. מצד אחד

$$\arg_L(i) = \frac{\pi}{2}$$

ולכן

$$-L(i) = -\frac{\pi i}{2}$$

ומצד שני

$$\arg(\frac{1}{i}) = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

ולכן

$$L(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

ואכן אין שוויון

$$L(-i) \neq -L(i)$$

.

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int\limits_\gamma \sin 2z \mathrm{d}z$ כאשר המסילה γ נתונה על ידי הפרמטריזציה $\gamma(t) = te^{it}$ עבור $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

פתרון: $\sin 2z$ היא פונקציה שלמה ויש לה פונקציה קדומה $-\frac{1}{2}\cos 2z$ ולכן כדי לחשב את האינטגרל מספיק להציב את הקצוות. נשים לב כי

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}i$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\int\limits_\gamma \sin 2z \mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\cos 2z\Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = -\frac{1}{2}\cos\pi i + \frac{1}{2}$$

(ב) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z$

פתרון: נקח שני עיגולים קטנים D_1 ו D_2 מסביב ל $0, i$ בהתאמה (לא צריך מסביב ל 3 כי הוא מחוץ למעגל). ראינו כי

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z + \int\limits_{D_2} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z$$

אם נסמן

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-3)}$$

אז זאת פונקציה אנליטית ב D_1 ובפנים שלו. בדומה

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$$

אנליטית ב D_2 ובפנים שלו ולכן לפי נוסחת קושי נקבל ש

$$\int\limits_{D_1} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(0)$$

היות ש

$$f'(z) = -\frac{z-3+z-i}{(z-i)^2(z-3)^2}$$

נקבל כאן

$$2\pi i\frac{3+i}{-9} = \frac{2\pi - 6\pi i}{9}$$

והאינטגרל השני לפי נוסחת קושי הוא

$$\int\limits_{D_2} \frac{1}{z^2(z-i)(z-3)}\mathrm{d}z = 2\pi i g(i) = 2\pi i\frac{-1}{i-3} = -\frac{2\pi i}{i-3}$$

בסך הכל הפתרון הוא

$$\frac{2\pi - 6\pi i}{9} - \frac{2\pi i}{i-3}$$

4. (א) מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ בהן $\cos\overline{z}$ גזירה ואת כל הנקודות בהן היא אנליטית.

פתרון:

$$\cos\overline{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{y} + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i\sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i\sin x)$$

כלומר

$$u(x,y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x,y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x(e^y + e^{-y}) \\ u_y &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_x &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_y &= \sin x(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$ לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

היות שכל אלה הן נקודות מבודדות. אין נקודות שיש להן סביבה שבה הפונקציה גזירה ולכן אין נקודות שבהן הפונקציה אנליטית.

(ב) הוכיחו כי

$$|\int\limits_{|z-1|=1} e^{\overline{z}}\mathrm{d}z| \leq 60$$

פתרון: נשתמש במשפט חסם ML. נזכור כי

$$|e^{\overline{z}}| = e^{\mathrm{Re}(\overline{z})}$$

כידוע e^x פונקציה מונוטונית עולה והערך הגבוה ביותר של $\mathrm{Re}(\overline{z})$ שיכול להתקבל על המעגל הוא כאשר $z = 2$ ולכן הערך המירבי של הפונקציה בתוך האינטגרל הוא e^2. אורך המסילה הוא כמובן 2π (כי הרדיוס הוא 1) ולכן לפי חסם ML האינטגרל חסום על ידי

$$|\int\limits_{|z-1|=1} e^{\overline{z}}\mathrm{d}z| \leq 2\pi e^2 \leq 60$$

נוסחאות:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

סכום סדרה חשבונית:

$$a_1 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

סכום סדרה הנדסית/גאומטרית:

$$a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$