

כל הזכויות שמורות  
 זהבית צבי ©

קורס גיאומטריה אוקלידית - פתרון תרגיל 2

שאלה

נתון  $A * B * C$  הראו כי  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .  
 הערה: יש לבדוק את כל המקרים בהגדרת הקרן ולהראות את ההכלה הזו כיוונית.

פתרון

נוכיח כעת כי  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .  
 נוכיח הכלה זו כיוונית.

כיוון ראשון:  $\overline{AB} \subseteq \overline{AC}$ .

ניקח נקודה כלשהי  $P$  על  $\overline{AB}$ .

• אם  $P = A$  אז  $P \in \overline{AC}$  וסימנו.

• אם  $P = B$  ונתון ש- $A * B * C$  אז  $P \in \overline{AC}$  כי  $P$  נמצאת על הקטע  $AC$  והקרן  $\overline{AC}$  היא הקטע איחוד עוד משהו.

כעת  $B \neq P \neq A$  על  $\overline{AB}$ , אז מתקים או  $A * P * B$  או  $A * B * P$ .

אם  $A * P * B$ : ונתון  $A * B * C$  לפי משפט 3 –  $B$  מתקים  $A * P * C$   
 $P \in \overline{AC} \Leftrightarrow$   
 זאת.

אם  $A * B * P$  ונתון  $A * B * C$

לא יודעים אם  $P$  לפני  $B$  אז אין אפשרות להשתמש ביחסים האלו כי  $B$  במקום השני בשני היחסים וראינו שהוא צריך להיות במקום השני ביחס אחד וביחס השני במקום השלישי בכדי להשתמש במשפט 3 –  $B$  או בתוצאה שלו.

לכן, רוצים להוכיח כי  $P \in \overline{AC}$ .

נניח בשלילה ש- $P \notin \overline{AC}$  ז"א שמתקים:

$P * A * C$  (\*) יחד עם  $A * B * P$  (\*\*)  
 עשינו זאת בכדי לקבל ראשונה בשני היחסים, באמת רואים ש  $A$  ביחס אחד במקום השני וביחס השני במקום השלישי ולכן נשתמש במשפט 3 – עבור היחסים (\*) + (\*\*).

לכן מתקים  $B * A * C$  וזה בסתירה לנתון ש- $P \in \overline{AC} \Leftrightarrow A * B * C$ .  
 ובכך הוכחנו כי  $\overline{AB} \subseteq \overline{AC}$  וטיפלנו בכל המקרים.

כיוון שני:  $\overline{AC} \subseteq \overline{AB}$  – אותה הוכחה בדיוק כמו הכיוון הראשון.

ניקח נקודה כלשהי  $P$  על  $\overline{AC}$ .

• אם  $P = A$  אז  $P \in \overline{AB}$  וסימנו.

• אם  $P = C$  ונתון ש- $A * B * C$  אז  $P \in \overline{AB}$  לפי הגדרת קרן.

כעת  $P \neq A, C$  ו- $P$  נקודה על  $\overline{AC}$ , לכן יתכנו האפשרויות הבאות  $A * P * C$  או  $A * C * P$  –  
 נבדוק את שני המקרים.

אם  $A * C * P$ : ונתון  $A * B * C$  נקבל לפי משפט 3 –  $A * B * P$  כלומר  $P \in \overline{AB}$   
 אם  $A * P * C$  ונתון  $A * B * C$

לא יודעים אם  $P$  לפני  $B$  לכן אין אפשרות להשתמש במשפט 3 –  $B$ .

## כל הזכויות שמורות

זיהבית צבי ©

נניח בשלילה ש- $P \notin \overrightarrow{AB}$  כלומר מתקים  $P * A * B$  ונתון  $A * P * C$  לפי תוצאה למשפט  
 3 – B נקבל ש- $C * A * B$  וזה בסתירה לנתון כי  $P \in \overrightarrow{AB} \Leftarrow A * B * C$ .  
 ובכך הוכחנו כי  $\overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}$ .  
 בסה"כ  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .