בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס :83-115-01
מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'

שאלה 1. (24 נקודות)

נתונה המשוואה

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+x\tan\frac{y}{x^2}$$

א. מצאו את המשוואה המתקבלת מהצבה במשוואה הנתונה $y(x)=v\left(x\right)x^2$. הראו כי המשוואה המתקבלת הינה משוואה הניתנת להפרדת משתנים;

ב. מצאו את הפתרון הפרטי של המשוואה הנתונה אשר מקיים $y\left(\sqrt{2}\right)=\pi$. היעזרו בפתרון של סעיף א';

ג. קבעו על פי משפט קיום ויחידות האם קיים פתרון למשוואה הנתונה אשר מקיים $y\left(\sqrt{2}\right)=\pi$ בקטע סביב $x_0=\sqrt{2}$ והאם הוא יחיד.

פתרון:

א. ההצבה הנדרשת היא $y(x)=v(x)x^2$ ונגזרתה לפי x היא $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}x^2+2xv$

נציב במד"ר הנתונה (*) ונקבל $\frac{dv}{dx}x^2+2xv=2vx+x\tan(v)$

נסדר ונקבל $\boxed{\frac{dv}{\tan v}=\frac{dx}{x}}$ שהיא משוואה עם משתנים מופרדים, כמבוקש.

ב. נבצע אינטגרציה על שני האגפים :

אינטגרציה של אגף שמאל נותנת $\int\frac{dv}{\tan v}=\int\frac{\cos v}{\sin v}dv=\int\frac{d(\sin v)}{\sin v}=\ln|\sin v|$

וסה"כ $\ln|\sin v|=\ln|x|+\ln|C|=\ln|Cx|$

לכן $\sin v=Cx$ ומכאן הפתרון הכללי של (*) (במשתנים המקוריים,כמובן) הוא : $\sin\frac{y}{x^2}=Cx$

נציב את תנאי ההתחלה $y(\sqrt{2})=\pi$ לפתרון הכללי ונקבל $C\sqrt{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, כלומר $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$

לכן הפתרון הפרטי המבוקש הוא $\boxed{\sin\frac{y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

ג. המשוואה (*) היא מהצורה $y' = f(x,y)$ כאשר $f(x,y) = \frac{2y}{x} + x\tan\left(\frac{y}{x^2}\right)$

הפונקציות $f(x,y),\ f_y(x,y)$ רציפות עבור $x \neq 0$ וכן עבור $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{y}{x^2} \neq \frac{2n-1}{2}\pi$

עבור הנקודה $(x_0,y_0) = (\sqrt{2},\pi)$ מתקיים $x_0 = \sqrt{2} \neq 0$, אך $n=1$, $\frac{y_0}{{x_0}^2} = \frac{\pi}{2} = \frac{2n-1}{2}\pi$

ולכן **לא מובטח קיום פתרון סביב $(x_0,y_0) = (\sqrt{2},\pi)$ ולא מובטחת יחידות הפתרון**

שאלה 2 . (20 נקודות)

א. נתונה המשוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. הראו כי אם $R = \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$ כאשר R היא פונקציה של xy בלבד, אזי למשוואה הדיפרנציאלית הנתונה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$;

ב. פתרו $\left(3x + \frac{6}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)dx = 0$

א. נבדוק מה התנאי ש- $z = xy$: $\mu(z)$ יהיה גורם אינטגרציה

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

צריך שיתקיים

$$(\mu(z)\cdot M)'_y = (\mu(z)\cdot N)'_x$$

$$\mu'(z)\cdot \underbrace{z'_y}_{x}\cdot M + M'_y\cdot\mu(z) = \mu'(z)\cdot \underbrace{z'_x}_{y}\cdot N + N'_x\cdot\mu(z)$$

$$\mu'(z)\cdot(xM - yN) = \mu(z)(N'_x - M'_y)$$

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{N'_x - M'_y}{xM - yN}$$

לכן אם $\frac{N'_x - M'_y}{xM - yN}$ היא פונק' של $\overset{z}{xy}$ בלבד $\mu(z)$ הוא גורם אינטגרציה עבור המשוואה הנתונה.

ב. ע״פ סעיף א.

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{N'_x - M'_y}{xM - yN} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{z}$$

ולכן $\ln \mu(z) = \ln z$.

לכן. $\mu(z) = z$

ומקבלים כי $z = xy$ הוא גורם אינטגרציה של המשוואה הנתונה. נכפול ונקבל

$$(3x^2y + 6x)\,dx + (x^3 + 3y^2)\,dy$$

$$F(x,y) = \int (3x^2y + 6x)\,dx = 3\frac{x^3}{3}y + \frac{6x^2}{2} + \varphi(y) = x^3y + 3x^2 + \varphi$$

$$F'_y = \cancel{3x^2}\; x^3 + \varphi'(y) = x^3 + 3y^2$$

ולכן $\varphi(y) = y^3$

מסקנה, הפתרון הוא

$$F(x,y) = x^3y + 3x^2 + y^3 = C$$

כלומר

$$\boxed{x^3y + 3x^2 + y^3 = C}$$

שאלה 3 .

א. רשמו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך לחשב את המקדמים) :

$$y''' - 2y' - 4y = 9xe^{2x} + 4\cos 2x - 6e^x \sin x$$

כאשר ידוע שאחד מהשורשים של המשואה האופיינית עבור המשוואה ההומוגנית המתאימה שווה ל-2 .

ב. מצאו שני פתרונות בלתי תלויים ליניארית בתחום $x > 0$ של משוואת אוילר ההומוגנית $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$. הוכחו אי-תלות של הפתרונות שמצאתם.

פתרון

א. המשוואה האופיינית כאן היא $r^3-2r-4=0$

ניסוי וטעייה קצרים יעלו כי אחד השורשים של הפולינום הוא 2.

נבצע חלוקת פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} r^2+2r+2 & \\ \hline r^3-2r-4 & r-2 \\ -\;r^3-2r^2 & \\ \hline 2r^2-2r-4 & \\ -\;2r^2-4r & \\ \hline 2r-4 & \\ -\;2r-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

כלומר קיבלנו $r^3-2r-4=\left(r-2\right)\left(r^2+2r+2\right)=0$

ולכן שורשי המשוואה האופיינית הם $r_{2,3}=-1\pm i \qquad r_1=2$

מכאן שהפתרונות הבסיסיים ההומוגניים הם:

$$y_1(x)=e^{2x} \qquad y_2(x)=e^{-x}\cos x \qquad y_3(x)=e^{-x}\sin x$$

נסמן את חלקי האיבר הלא הומוגני:

$$g_1(x)=9xe^{2x} \qquad g_2(x)=4\cos 2x \qquad g_3(x)=-6e^x\sin x$$

הניחוש הראשוני המתאים לתבניות אלה הוא

$$\begin{cases} Y_1(x)=\left(A_1x+A_2\right)e^{2x} \\ Y_2(x)=B_1\cos 2x+B_2\sin 2x \\ Y_3(x)=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x \end{cases}$$

נבדוק האם ניחוש זה מכיל פתרונות בסיסיים של הבעיה ההומוגנית:

- ב Y_1 מופיע האיבר A_2e^{2x} שהוא פתרון הומוגני של המשוואה ולכן יש להכפיל את כל הביטוי Y_1 ב x.
- ב Y_2 אין איברים המהווים פתרונות בסיסיים.
- ב Y_3 אין איברים המהווים פתרונות בסיסיים.

(האקספוננט שבו הוא בחזקה חיובית בעוד האקספוננט שבפתרונות ההומוגניים הוא בחזקה שלילית)

בסה"כ קיבלנו כי צורת פתרון פרטי של המשוואה הוא

$$\boxed{\begin{cases} Y_1(x)=\left(A_1x+A_2\right)xe^{2x} \\ Y_2(x)=B_1\cos 2x+B_2\sin 2x \\ Y_3(x)=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x \end{cases}}$$

(ניתן כמובן למצוא את A_i,B_i,C_i ע"י גזירה והצבה, אך לא נתבקשנו לעשות זאת)

ב. זאת משוואת אויילר הומוגנית ולכן ננחש פתרון מהצורה $y(x)=x^r$ ונקבל משוואה אינדיציאלית עבור

פרמטר r : $r(r-1)+3r+2=r^2+2r+2=0$

שורשיה הם $r_{1,2}=-1\pm i$

והפתרונות המתאימים לשורשים אלה הם $\boxed{y_1(x)=x^{-1}\cos(\ln x) \qquad y_2(x)=x^{-1}\sin(\ln x)}$

הוורונסקיאן של הפתרונות הנ"ל הוא

$$W\left(y_1(x),y_2(x)\right)=\begin{vmatrix} x^{-1}\cos(\ln x) & x^{-1}\sin(\ln x) \\ -x^{-2}\cos(\ln x)-x^{-2}\sin(\ln x) & -x^{-2}\sin(\ln x)+x^{-2}\cos(\ln x)\end{vmatrix}=x^{-3}$$

$\boxed{\text{בתחום } x>0 \text{ מתקיים } W\neq 0}$ וזה מוכיח שהפתרונות y_1,y_2 הם בלתי תלויים ליניארית.

שאלה 4 . (40 נקודות)

נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות $\bar{x}'=A\bar{x}$

כאשר $\bar{x}=\bar{x}(t)$; $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & b\end{bmatrix}$; $a,b\in\mathbb{R}$ - פרמטרים כלשהם.

א. מצאו ביטוי לפתרון הכללי של המערכת. תתבוננו בכל המקרים האפשריים;

ב. פתרו את המערכת הנתונה בעזרת התמרת לפלס עבור כל המקרים האפשריים;

ג. מצאו את פתרון $\bar{x}(t)$ המקיים $a-b=3$, $\bar{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

ד. פתרו מערכת לא הומוגנית $\bar{x}'=A\bar{x}+\bar{c}$ עבור $\bar{c}=\begin{pmatrix}2t\\1-e^{-3t}\end{pmatrix}$, $\bar{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

$a-b=3$ בשיטת וריאציית הפרמטרים.

שאלה 5. (24 נקודות)

א. הוכיחו ישירות (ללא הסתמכות על טבלת התמרת לפלס) כי $L\{tf(t)\}=-F'(s)$;

ב. בהינתן המשוואה $y''+ty=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. מצאו ביטוי ל- $F(s)$ (<u>אין צורך לפתור את האינטגרל בתשובה הסופית</u>) ;

ג. פתרו בעזרת התמרת לפלס את בעיית התחלה הבאה :

$y''+16y=1$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

(d) $y'' + 16y = 1$ subject to $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Answer. Applying the Laplace transform to both sides, we get

$$s^2Y - s - 2 + 16Y = \frac{1}{s}$$

therefore,

$$(s^2 + 16)Y = \frac{1}{s} + s + 2$$

and so

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+16)} + \frac{s+2}{s^2+16} \\ &= \frac{1}{16}\frac{1}{s} - \frac{1}{16}\frac{s}{s^2+16} + \frac{s+2}{s^2+16} \\ &= \frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{15}{16}\frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16} \end{aligned}$$

Therefore $\boxed{y(t) = \frac{1}{16} + \frac{15}{16}\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t}$.

שאלה 6. (11 נקודות)

נגדיר

$$f(t) = \begin{cases} t, \ 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2t, \quad t \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

א. (2 נק') כתבו נוסחה ל- $f(t)$ בעזרת הפונקציה $u_c(t)$;

ב. (3 נק') חשבו את התמרת לפלס של $f(t)$;

ג. (6 נק') פתרו בעזרת התמרת לפלס את הבעיה $y'' + ty = f(t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$