תרגיל בית 2 אינפי 3

1. תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קומפקטיות, ותהינה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה של קבוצות קומפקטיות. הוכיחו או ההפריכו את הטענות הבאות:

   (א) $A \cup B$ קומפקטית.

   (ב) $A \cap B$ קומפקטית.

   (ג) $A \backslash B$ קומפקטית.

   (ד) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ קומפקטית.

2. אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר $A + B = \{a + b \mid a \in A, \quad b \in B\}$.
   הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   (א) אם A, B חסומות אז $A + B$ חסומה.

   (ב) אם A, B פתוחות אז $A + B$ פתוחה.

   (ג) אם A, B סגורות אז $A + B$ סגורה.

   (ד) אם A פתוחה ו B סגורה אז $A + B$ פתוחה.

3. האם גבול הסדרה הבאה קיים? ואם כן, מהו?

$$\left(\frac{n^3 + 4n + 5}{n^6 + 2n^2 + 3}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

4. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או ההפריכו: אם $y_n = d_2(x_n, 0)$ היא סדרת מספרים עולה ממש אז x_n היא סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.
   הערה: d_2 היא המטריקה האוקלידית הסטנדרטית.