הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הוכחת משפט 1.1 (הרצאה 7):

(1) אזי: $f\in L_1(R)\cap C(R)$ כיוון ש

$$\left|h(x)\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\left|g(x-t)\right|dt\le\|f\|_{C(R)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(x-t)\right|dt=$$

$$=\left[x-t=s\right]=\|f\|_{C(R)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(s)\right|(-1)ds=$$

$$=\|f\|_{C(R)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(s)\right|(-1)ds=\|f\|_{C(R)}\|g\|_{L_1(R)}$$

מכאן נובע, שהאינטגרל (1.1) מתכנס בהחלט (ובנוסף,ז"א שהינו מתכנס נקודתית) עבור $\forall x\in R$ש ומתקיים

$$\sup_{x\in R}\left|h(x)\right|\le\|f\|_{C(R)}\cdot\|g\|_{L_1(R)}<\infty\qquad(1.4)$$

(2) נראה כי $h(x)$ רציפה $\forall x\in R$. יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $N(\varepsilon)\gg 1$ כך שיתקיים:

$$\max\left\{\int_{N-1}^{\infty}\left|g(\xi)\right|d\xi,\int_{-\infty}^{-(N-1)}\left|g(\xi)\right|d\xi\right\}\le\frac{\varepsilon}{8\|f\|_{C(R)}}\qquad(1.5)$$

(פה $N=N(\varepsilon)$ ואנו מניחים כמובן כי $\|f\|_{C(R)}\ne 0$, אז $h(x)\equiv 0,\forall x\in R$)

כיוון שהפונקציה $g(\cdot)$ רציפה, אז על $\left[-(N+1),N+1\right]$ היא רציפה במידה שווה (לפי משפט קנטור) ולכן לפי ה$\varepsilon>0$ הנתון נמצא $\delta\in(0,1/2)$ כך שלכל ערכי s_1,s_2 מהחתך $\left[-(N+1),N+1\right]$ מתקיים:

$$(1.6)\quad N\cdot\left|g(s_2)-g(s_1)\right|\le\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{C(R)}}$$, אם $\left|s_2-s_1\right|\le\delta$.

תהי x_0 נקודת חוד מR. נבחר $N=N\left(\varepsilon\right)$ כך שמתקיים (1.5) והצבת $x_0\in\left[-N,N\right]$ ותהי $\left|x-x_0\right|\le\delta$. אזי:

$$\left|h(x)-h(x_0)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x_0-t)dt\right|=$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[g(x-t)-g(x_0-t)\right]dt\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\left|g(x-t)-g(x_0-t)\right|dt=$$

$$=\|f\|_{C(R)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(x-t)-g(x_0-t)\right|dt=\begin{bmatrix}x_0-t:=s\Rightarrow -t=s-x_0\Rightarrow\\ x-t=s+x-x_0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\|f\|_{C(R)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|(-1)ds\right]=$$

$$\|f\|_{C(R)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds\le$$

$$\|f\|_{C(R)}\int_{-\infty}^{-N}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds+\int_{N}^{\infty}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds$$

$$+\int_{-N}^{N}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds=$$

$$=\|f\|_{C(R)}\left\{I_1+I_2+I_3\right\}\quad(1.7)$$

נעריך את גודל $I_k,k=1..3$ ב (1.7). האינטגרלים I_1,I_2 מוערכים בצורה דומה. למשל:

$$I_2=\int_N^{\infty}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds\le\int_N^{\infty}\left|g(s+(x-x_0))\right|ds+\int_N^{\infty}\left|g(s)\right|ds=$$

$$=\left[s+x-x_0=t\right]=\int_{N-(x-x_0)}^{\infty}\left|g(t)\right|dt+\int_N^{\infty}\left|g(s)\right|ds\le 2\int_{N-1}^{\infty}\left|g(s)\right|ds\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{C(R)}}\Rightarrow$$

$$\|f\|_{C(R)}\left(I_1+I_2\right)\le\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}\quad(1.8)$$

כעת נעריך את I_3. בעזרת (1.6) נקבל:

$$I_3=\int_{-N}^{N}\left|g(s+(x-x_0))-g(s)\right|ds\le$$

$$\left[\begin{array}{ll} s_2:=s+(x-x_0) & s_2-s=\left|x-x_0\right|\le\delta \\ s_1:=s & \Rightarrow see(1.6)\end{array}\Rightarrow\right]\le 2N\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{C(R)}}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2\|f\|_{C(R)}}\Rightarrow\|f\|_{C(R)}I_3\le\frac{\varepsilon}{2}\quad(1.9)$$

מ(1.8) ו(1.9) נובע, שעבור הנקודה הנתונה x_0 ו$\varepsilon>0$, מצאנו $\delta>0$ כך ש $\left|h(x)-h(x_0)\right|\le\varepsilon$ לכל x כך ש $\left|x-x_0\right|\le\delta$ $\Leftarrow$ הפונקציה $h(x)$ רציפה ב$x\in R$. נראה כעת ש$h(x)\in L_1(R)$. יהיו $m\ge1$ ו$n\ge1$ ערכים כלשהם,

$$\left|h(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)g(x-t)\right| dt = \int_{-n}^{n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt + \int_{|t|\ge n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt$$

$$= \int_{-n}^{n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt + \varphi_n(x), \quad x \in R \quad (1.10)$$

כאשר:

$$\varphi_n(x) = \int_{|t|\ge n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt \quad (1.11)$$

מ(1.10) $\Leftarrow$

$$\int_{-m}^{m} \left|h(x)\right| dx \le \int_{-m}^{m} \left[\int_{-n}^{n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt \right] dx + \int_{-m}^{m} \varphi_n(x) dx \quad (1.12)$$

דרוש מאתנו:

(a) לבדוק שמתקיים:

$$\int_{-m}^{m} \left[\int_{-n}^{n} \left| f(t)g(x-t)\right| dt \right] = \int_{-n}^{n} \left[\int_{-m}^{m} \left| f(t)g(x-t)\right| dx \right] dt \quad (1.13)$$

(b) להראות ש

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-m}^{m} \varphi_n(x) dx = \int_{-m}^{m} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) dx \quad (1.14)$$

(a) עבור $x \in [-m,m], t \in [-n,n]$ הפונקציה $F(x,t) = \left| f(t)g(x-t)\right|$ מוגדרת, ובנוסף:

$(a.1)$אינטגרבילית לפי x ב$[-m,m]$ עבור כל קבוע$t\in[-n,n]$, כיוון ש$f,g\in L_1(R)\cap C(R)$

$(a.2)$אינטגרבילית לפי t ב$[-n,n]$ עבור כל קבוע $x\in[-m,m]$, כיוון ש$f,g\in L_1(R)\cap C(R)$

$$F(x,t)\le\|f\|_{C(R)}\cdot\|g\|_{C(R)}<\infty,\quad \forall x\in[-m,m],\forall t\in[-n,n]\ (a.3)$$

כלומר לפי משפט ארצלה (הרצאה 1, משפט 4.1), מתקיים השוויון:

$$\int_{-m}^{m}\left[\int_{-n}^{n}F(x,t)dt\right]=\int_{-n}^{n}\left[\int_{-m}^{m}F(x,t)dx\right]dt\ \ \Rightarrow\ (1.13)$$

(b) נשים לב, שמתקיימת הטענה:

$(b.1)$ כל הפונקציות $\varphi_n(x)$ (ראה (1.11)):

$$\varphi_n(x)=\int_{|t|\ge n}|f(t)g(x-t)|dt,x\in R$$

אינטגרביליות לפי המובן של רימן ב$[-m,m]$ (כיוון ש$\varphi_n(x)$ רציפות (מראים זאת כמו במקרה של $h(x)$ בקטע סופי $[-m,m]$)

$(b.2)$ הסדרה $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ עבור $n\to\infty$ בעלת הפונקציה $\varphi(x)\equiv0$ כגבול, $x\in[-m,m]$;

$$0\le|\varphi_n(x)|\le\int_{|t|\ge n}|f(t)||g(x-t)|dt\le\|g\|_{C(R)}\int_{|t|\ge n}|f(t)|dt\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$(b.3)$ הפונקציה $\varphi(x)\equiv0$ אינטגרבילית לפי המובן של רימן ב$[-m,m]$ (טריוויאלי)

$(b.4)$קיימת פונקציה אינטגרבילית לפי רימן $F(x)$, $x\in[-m,m]$, כך ש:

$$0 \le |\varphi_n(x)| \le F(x), \quad x \in [-m,m], n \ge 1$$

הביטוי האחרון יהיה אחרון אם ניקח: $F(x) = \|g\|_{C(R)} \| f \|_{L_1(R)}, \ x \in [-m,m]$

ואכן: $\varphi_n(x) \le \|g\|_{C(R)} \int\limits_{|t| \ge n} |f(t)| dt \le \|g\|_{C(R)} \| f \|_{L_1(R)}$

אם כך, מתקיימים כל התנאים של משפט ארצלה (הרצאה 1, משפט 3.4) ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-m}^{m} \varphi_n(x)dx = \int_{-m}^{m} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx = \int_{-m}^{m} 0dx \quad (1.15)$$

מ(1.12) (1.13) ו (1.15) נקבל:

$$\int_{-m}^{m} |h(x)| dx \le \lim_{m\to\infty} \left\{ \int_{-m}^{m} \left[\int_{-n}^{n} |f(t)g(x-t)dt| \right] dx + \int_{-m}^{m} \varphi_n(x)dx \right\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{-n}^{n} \left[\int_{-m}^{m} |f(t)g(x-t)dx| \right] dt + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_{-m}^{m} \varphi_n(x)dx}_{=0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f(t)| \left[\int_{-m}^{m} |g(x-t)dx| \right] dt$$

כעת, לפי הגדרת האינטגרל הלא מסוים

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{-m}^{m} |g(x-t)dx| \right] dt \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)dx| \right] dt = [x-t := s] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(s)ds| \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)| ds$$

$$\Rightarrow \int_{-m}^{m} |h(x)| dx \le \| f \|_{L_1(R)} \| g \|_{L_1(R)} \, , \forall m \ge 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx = \lim_{m \to \infty} \int_{-m}^{m} |h(x)| dx \le \| f \|_{L_1(R)} \| g \|_{L_1(R)}$$

מכאן מסיקים ש $h(\cdot) \in L_1(R)$. מש"ל.

(3) בהמשך נוכיח את הנוסחא (1.3).

בהתמרות הבאות אנחנו נעשה שינוי סדר האינטגרציה ונעבור לגבול תחת האינטגרל. פעולות אלה ניתן לבסס על משפטי ארצלה באותו אופן שנעשה לעיל, ב()2. ולכן את ההוכחה נשאיר לקורא בתור תרגיל.

$$h(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{i\sigma x} dx =$$

כעת נעבור לפס אינטגרציה $[-N, N]$ כדי לבסס את שינוי אינטגרציה.

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(x-t) dt \right] dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-N}^{N} e^{i\sigma x} h(x-t) dx \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x} h(x-t) dx \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} h(x-t) dx \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma(x-t)} h(x-t) d\left(x-t\right) \right] dt =$$

$$= \left| x-t := s \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma s} h(s) ds \right] dt =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} dt \right\} \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma s} h(s) ds \right\} =$$

$$= 2\pi \hat{f}(\sigma) \cdot \hat{g}(\sigma)$$

מש"ל.