תרגול 1 - אינפי 2

09:52 9 March, 2021

אתר הקורס: https://math-wiki.com/index.php?title=88-133_%D7%AA%D7%A9%D7%A4%22%D7%90_%D7%A1%D7%9E%D7%A1%D7%98%D7%A8_%D7%91/%D7%91%D7%95%D7%92%D7%A8%D7%99%D7%9D

המייל שלי: emunac@gmail.com

מרכיבי הציון:
80% בחינה
10% בוחן
10% תרגילי XI.

אינטגרלים לא מסויימים.

בעצם הפיכה לנגזרת. לדוגמה: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$ לכל $C\in\mathbb{R}$.

אינטגרלים מיידיים:

$$a\neq -1 \quad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

$$\int e^x\,dx = e^x+C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x+C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x+C$$

תכונות אינטגרל:

1) $\int f+g = \int f+\int g$

2) $\int cf = c\int f$

תרגיל: חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{1.5}}{1.5}+C$

2) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$

3) $\int x^7+x+9-e^x+\sin x+5\cos x+\frac{1}{x}\,dx =$

$\frac{x^8}{8}+\frac{x^2}{2}+9x-e^x-\cos x+5\sin x+\ln|x|+C$

שיטות לאינטגרציה:

1) אינטגרציה בחלקים.

$(u\cdot v)' = u'v+uv'$

$\int(u\cdot v)' = \int u'v+\int uv'$ נפעיל אינטגרל

$uv = \int u'v+\int uv' \Rightarrow \boxed{\int u'v = uv-\int uv'}$

נוסחת אינטגרציה בחלקים.

א) תרגיל: חשבו את $\int xe^x$.

$u'=e^x \Rightarrow u=e^x$

$v=x \qquad v'=1$

$\int xe^x = xe^x-\int e^x\cdot 1 = xe^x-e^x+C = e^x(x-1)+C$

ב) חשבו את $\int \ln x\,dx \Leftarrow \int 1\cdot\ln x\,dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

10:19 9 March, 2021

$$u' = 1 \quad \Longrightarrow \quad u = x$$
$$v = \ln x \qquad\quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c$$
$$= x(\ln x - 1) + c$$

2)

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$u' = e^x \quad \Longrightarrow \quad u = e^x$$
$$v = \sin x \qquad\quad v' = \cos x$$

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{(*)}$$

$$(*) = \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$u' = e^x \quad \Longrightarrow \quad u = e^x$$
$$v = \cos x \qquad\quad v' = -\sin x$$

ולכן

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

נעביר אגף:

$$2 \int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$\int e^x \sin x = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

3)

$$\int x \arctan x \, dx$$

$$u' = x \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{x^2}{2}$$
$$v = \arctan x \qquad\quad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2 - 1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$\left(\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\left(x-\arctan x\right)$$

10:32 9 March, 2021

שיטת ההצבה:

תזכורת: כלל השרשרת: $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

נפעיל אינטגרל: $\int (f(g(x)))'dx = \int f'(g(x))\cdot g'(x)dx$

$$\boxed{f(\underbrace{g(x)}) = \int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx} \leftarrow$$

$f=e^x$

$g=x^2+7$

דוגמה: $\int e^{\boxed{x^2+7}}\underbrace{2x}dx = e^{x^2+7}+C$

נפתור בצורה הבאה:

$t=x^2+7$

$dt=2xdx$

$$\int e^{x^2+7}\underbrace{2xdx}=\int e^t\,\underbrace{dt}=e^t+c=e^{x^2+7}+c$$

תרגול: חשבו את האינטגרלים הבאים!

1. $\int e^{x^3}x^2dx$

נסמן: $t=x^3$, $dt=3x^2\underbrace{dx} \Rightarrow dx=\frac{dt}{3x^2}$

$$\int e^{x^3}x^2\,dx=\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{1}{3}e^t+c$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}e^{x^3}+c}$$

2. $\int \tan x\,dx \Leftarrow \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ $\qquad f'(g(x))\boxed{g'(x)dx}$

נסמן: $t=\cos x$

$dt=-\sin x\,dx$

פתר:

$$t = \cos x$$

$$dt = -\sin x\, dx$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \frac{1}{t}(-dt) = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\ln|t| + C = \boxed{-\ln|\cos x| + C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c$$

10:57 9 March, 2021

3. עבור $a>0$

$a \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,a\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$t = \frac{x}{a}$$

$$dt = \frac{1}{a}\,dx \Rightarrow dx = a\,dt$$

$$= \arcsin(t) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

לפעמים נצטרך להשתמש בכמה שיטות אינטגרציה בבת אחת!

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$t = \sqrt{x}$$

כלומר

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t \cdot 2t\,dt = 2te^t - \int 2e^t = 2te^t - 2e^t + c$$

$$u' = e^t \Rightarrow u = e^t$$
$$v = 2t \quad\quad v' = 2$$

ובסה"כ נחזור להצבה $t=\sqrt{x}$ ונקבל:

$$\int e^{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ציון:

$$g(x)=\sqrt{x}$$

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$dg=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ נגזרת לפי משתנה g.

תרגיל: יהי $m\in\mathbb{N}$. חשבו את $I_m=\int\frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$

$$I_1=\int\frac{1}{1+x^2}=\arctan x+c$$

נחשב באופן רקורסיבי את I_m.

$$I_m=\int\frac{1}{(1+x^2)^m}=\int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$$

$$\begin{aligned}u'&=1\\ v&=\frac{1}{(1+x^2)^m}\end{aligned}\implies\begin{aligned}u&=x\\ v'&=-m(1+x^2)^{-m-1}2x\end{aligned}$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^m}-\int\frac{x(-m2x)}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{m+1}}$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{m+1}}=$$

$$I_m=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\int\boxed{\frac{1}{(1+x^2)^m}}-\boxed{\frac{1}{(1+x^2)^{m+1}}}\,dx$$

$$I_m=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\left(I_m-\underline{I_{m+1}}\right)$$

ולכן נוסחת הנסיגה שלנו תהיא: $\boxed{I_{m+1}=\frac{x}{2m(1+x^2)^m}+\frac{2m-1}{2m}\cdot I_m}$

ולכן נוסחת הנסיגה שלנו היא:

$$\boxed{I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + \frac{2m-1}{2m} \cdot I_m}$$