אינפי 4 – תרגיל 4 – פיתרון

מומלץ להציץ בחומר העזר על משפט גרין באתר לפני פיתרון התרגיל !

1.א. עבור איזו מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך בעלת כיוון חיובי (כזו שמשפט גרין תקף עבורה) במישור C ערך האינטגרל הקווי הבא יהיה מקסימלי ?

$\int_C (x+y)^3dx + (3x^2y + 3x - e^y)dy$, וחשבו ערך זה ! .

ב. תהי $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ מסילה גזירה ברציפות , סגורה , לא קבועה במישור כך שמתקיים : $\int_\gamma -y^3dx + x^3dy = 0$. האם ייתכן שתמונת המסילה היא שפה של תחום סגור שעונה על הדרישות של משפט גרין ?

פיתרון:

א. שימו לב כי קיים :

$\int_C (x+y)^3dx + (3x^2y + 3x - e^y)dy = \iint_{\mathrm{R}} [(6xy+3) - 3(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2]dA = \iint_R (3 - 3x^2 - 3y^2)dA$, כאשר R הוא התחום ש"כלוא" על ידי תמונת המסילה.

שימו לב שהאינטגרנד באינטגרל האחרון חיובי בתוך עיגול היחידה סביב הראשית במישור (!) , ושלילי מחוץ לאותו עיגול.לכן – ערך האינטגרל יהיה מקסימלי אם המסילה תהיה שפת העיגול הנ"ל.

ב. אם המסילה הייתה עונה על דרישות משפט גרין – מסילה פשוטה , סגורה בעלת אורך אז ממשפט גרין היינו מקבלים כי האינטגרל שלנו שווה לאינטגרל כפול : $\iint_R 3(x^2+y^2)dxdy$, אך אינטגרל זה , המחושב ביחס לקבוצה ששפתה המסילה שלנו – היא כזו שיש לה פנים לא ריק ! ולכן – אינטגרל פונקציה חיובית ממש על קבוצה שמכילה קבוצה פתוחה (פנים לא ריק !) – הינו חיובי ממש , בסתירה לנתון .

2. חשבו את האינטגרל הקווי הבא :

$\int_C (\mathrm{y} + tan^3x)dx + (3x - tan^3y)dy$, כאשר C העקום $y = x^3$ מהנקודה $(0,0)$ אל הנקודה $(1,1)$.

פיתרון :

ניתן לחשב את האינטגרל בצורה ישירה על ידי פרמטריזציה של העקומה , אך אנו נשתמש כאן במשפט גרין! כדי לעשות זאת , נמשיך את העקומה וניצור עקומה סגורה , פשוטה (ובעלת אורך) – וזאת על ידי הוספת הקטע מ- $(1,1)$

עד $(0,0)$, לאורך הישר $y = x$. אז , האינטגרל הקווי שנקבל יהיה סכום שני אינטגרלים קויים – הנתון בהתחלה פלוס זה לאורך הקטע הנ"ל – ולפי משפט גרין (עכשיו זו כבר עקומה סגורה !) – האינטגרל הקווי הזה שווה לאינטגרל הכפול : $\iint_D 2dxdy$ כאשר D הוא השטח הכלוא בין הישר $y = x$

והעקומה $y = x^3$ ולכן שווה ל:

$2\int_0^1 (\int_{x^3}^{x} dy)\, dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)|_0^1 = \frac{1}{2}$, ונחשב כעת את האנטגרל הקווי לאורך הקטע $0 \le x \le 1$, $y = x$ - נקרא לקטע זה L :

$$\int_L (y + tan^3 x)dx + (3x - tan^3 y)dy =$$

$$\int_1^0 (t + tan^3 t)dt + (3t - tan^3 t)dt = (2t^2)|_1^0 = -2$$

ומכאן שהאינטגרל הקווי המקורי שלנו שווה ל : $\mathbf{\frac{1}{2} - (-2) = 2.5}$ (הכפול מינוס הקווי לאורך הקטע שהוספנו , בכיוון המתאים !)

3. א. אם C קטע הישר שמחבר הנקודה (a, b) לנקודה (c, d) הוכיחו כי קיים :

$$\int_C -ydx + xdy = ad - bc$$

ב. אם קודקודי משולש הם $(x_i, y_i), i = 1,2,3$ נמצאים בסדר הפוך לכיוון השעון אם נלך מאחד לשני לפי הסדר – הראו כי שטח המשולש הוא :

$$\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

פתרון – שאלת הוכחה ! ולגבי השטח שימוש בנוסחא מתאימה עבור שטח – תוצאה ממשפט גרין.

4. חשבו את האינטגרל : $\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ כאשר C מסילת ז"ורדן סגורה פשוטה בעלת אורך שמקיפה תחום פשוט קשר עבורו נוסחת גרין תקפה :

א. כאשר המסילה איננה מקיפה את ראשית הצירים .

ב. כאשר המסילה כן מקיפה את ראשית הצירים.

(במקרה זה – ישנו מרחק חיובי בין תמונת המסילה לראשית הצירים וניתן להקיף את ראשית הצירים בעיגול קטן שכולו יהיה בתוך התחום אותו מקיפה המסילה המקורית שלנו...)

<u>פתרון :</u>

א. במקרה זה שלא מקיפים את הראשית נקבל אפס – ממשפט גרין !

ב. במקרה זה לא ניתן להשתמש במשפט גרין ישירות (הפונקציה לא מוגדרת בראשית ...) . נבנה שפת עיגול מסביב לראשית , קטן מספיק שיהיה מוקף כולו על ידי המסילה שלנו (אפשר לעשות זאת כי פונקציית המרחק מהראשית היא רציפה ונתון שהמסילה שלנו איננה עוברת דרך הראשית . לכן יש מינימום לפונקציית המרחק מתמונת המסילה לראשית .ונוכל לקחת מעגל עם רדיוס למשל חצי מאותו מינימום ...) .נקרא למעגל זה עם רדיוס r : C_r

נסתכל על התחום שבין המסילה המקורית לאותו מעגל קטן . ונייש עליו את הגירסא של משפט גרין שהופיעה בדפי ההסבר .נקבל אז:

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} - \oint_{C_r} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 0$$ (שרטטו לעצמכם כדי להיווכח .0

קיבלנו ממשפט גרין (המוכלל) עבור התחום החדש החסום שלנו) .

ומכאן נקבל אפשרות לחשב את האינטגרל שלנו :

$$\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \oint_{C_r} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$$, אינטגרל קווי לאורך מעגל עם רדיוס r מסביב לראשית עם הפרמטריזציה הרגילה .

.

5. מהו השטח הכלוא (ברביע הראשון) על ידי הלולאה הסגורה המוגדרת על ידי אוסף הנקודת המקיימות : $x^3 + y^3 = 3xy$? "יצור גיאומטרי זה נקרא :

העלה של דקארט (Folium of Descartes) , ומכיוון שתמונה אחת שווה יותר מאלף מילים , הציצו בלינק -

http://en.wikipedia.org/wiki/Folium_of_Descartes - כדי לקבל מושג על הצורה המתקבלת.

<u>רמז :</u> השתמשו בהצגה $y = tx$ (שזהו טריק שימושי במעבר להצגה פרמטרית של עקומות ...) כדי לקבל פרמטריזציה של העקום על ידי :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}\ ,y(t) = \frac{3t^2}{1+t^{3,}} :$$

$$the\ leaf\ corresponds\ to\ 0 < t < \infty$$

השתמשו בנוסחת השטח עבור ההצגה של התבנית : $-\frac{1}{2}(-ydx + xdy)$,

ונקבל בסוף אינטגרל לא אמיתי ...) .

<u>פיתרון :</u> את תמונת העקומה ראיתם בקישור המצורף .ראיתם גם כי תמונת העקומה עבור הרביע הראשון מתאימה לתחום ערכים של $t \in [0, \infty)$.

כל קטע חלקי סופי $[0, A]$ ייתן חלק מהעקום המבוקש , אך נוכל להתקרב כמה שנרצה לעקום המבוקש על ידי הגדלת קטע פרמטריזציה זה.

$$Area = 0.5 \int_R xdy - ydx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$$

ונקבל תשובה : $\frac{3}{2}$. הצדקנו את לקיחת הגבול לאינסוף כאשר עד עתה התייחסנו לקטע פרמטר סופי כשהגדרנו עקומה על ידי כך שעבור קטע סופי נקבל קירוב לעקום הסגור ונוכל להשלימו עם קטע ישר שיסגור את המסילה . האינטגרל לאורך הקטע הישר הזה ישאף לאפס כאשר אורך המסילה ישאף לאפס. (מסתמך על אי השיוויון : $\left|\int_C \underline{F} \cdot d\underline{x}\right| \le ML(C)$, כאשר M הוא מקסימום הפונקציה שלנו על תמונת המסילה , ו- L הוא מציין אורך מסילה.