חשבון אינפי 1
תרגיל 1-פתרון

1. מצאו את משוואת המעגל שאחד הקטרים שלו הינו קטע המחבר את הנקודות $(-1,0)$ ו- $(5,8)$.

פתרון:

נמצא את רדיוס המעגל $r=\frac{\text{distance}((-1,0),(5,8))}{2}=\frac{\sqrt{(-1-5)^2+(0-8)^2}}{2}=5$

משוואת המעגל היא $(x-h)^2+(y-k)^2=25$.

מרכז המעגל זהו נקודת האמצע של הקוטר ולכן $h=\frac{5+(-1)}{2}=2, k=\frac{8+0}{2}=4$

ולכן משוואת המעגל היא $(x-2)^2+(y-4)^2=25$.

2. הוכיחו כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$.

פתרון: נחלק ל- 3 מקרים:

א. $x\ge 0$ וגם $y\ge 0$ וכן נניח בה"כ $x\ge y\ge 0$
במקרה זה $x-y\ge 0$ וכן $|x|-|y|\ge 0$ ולכן
$|x-y|=x-y=|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

ב. $x\le 0$ וגם $y\le 0$ וכן נניח בה"כ $x\le y\le 0$ במקרה זה $x-y\le 0$ וכן $|x|-|y|\ge 0$ ולכן
$|x-y|=-x+y=|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

ג. נניח בה"כ $x\ge 0$ ו- $y\le 0$. במקרה זה $x-y\ge 0$:
אם $|x|\ge|y|$ נקבל $|x|-|y|\ge 0$ ולכן $|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$
ומכאן $|x-y|=x-y=|x|+|y|\ge|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.
אם $|x|\le|y|$ נקבל $|x|-|y|\le 0$ ולכן $|y|-|x|=\big||x|-|y|\big|$
ומכאן $|x-y|=x-y=|x|+|y|\ge|y|-|x|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

3. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{1}{|x^2-4x+3|+|x-1|+|x-2|-2x}$

פתרון:

$$x^2-4x+3=0 \quad x-1=0 \quad x-2=0$$
$$x_1=1\ ,\ x_2=3 \quad x=1 \quad x=2$$

ולכן נחלק ל-4 מקרים:

$$\begin{cases} x\le 1 \\ x^2-4x+3-x+1-x+2-2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x\ne 4-\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1<x\le 2 \\ -x^2+4x-3+x-1-x+2-2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x\le 2 \\ x\ne -1\pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1<x\le 2$$

$$\begin{cases} 2<x\le 3 \\ -x^2+4x-3+x-1+x-2-2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x\le 3$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x^2-4x+3+x-1+x-2-2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-4x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\ne 4 \end{cases}$$

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\ne 4-\sqrt{10}, x\ne 4\right\}$$

ב. $f(x)=\log_9\left(1-\left|x^2-15\right|^{-x^2-4x-6}\right)$

פתרון:

$$\left|x^2-15\right|^{-x^2-4x-6}<1 \Leftrightarrow 1-\left|x^2-15\right|^{-x^2-4x-6}>0$$

נשים לב ש- $-x^2-4x-6<0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן צריך לדרוש $\left|x^2-15\right|>1$

אי השוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $x^2-15>1$ או $x^2-15<-1$, ז"א $x^2-16>0$ או $x^2-14<0$ מכאן תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$D\left(f\right)=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x<-4 \text{ or } -\sqrt{14}<x<\sqrt{14} \text{ or } x>4\right\}$$

4. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות ושרטטו את התחום במישור :

א. $f(x,y)=(x+y)\cdot 5^{-\sqrt{x^2-6x+y^2+2y+1}}$

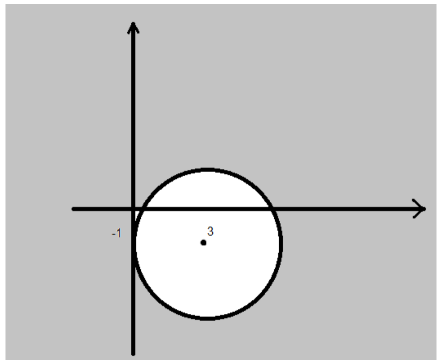
פתרון:

$$D\left(f\right)=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2-6x+y^2+2y+1\ge 0\right\}$$

$$=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2-6x+9+y^2+2y+1\ge 9\right\}$$

$$=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| \left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2\ge 3^2\right\}$$

כלומר תחום ההגדרה של הפונקציה הינו קבוצת הנקודות במישור הנמצאות מחוץ לעיגול עם מרכז בנקודה $(3,-1)$ ורדיוס 3, כולל המעגל .



(התחום האפור בציור)

ב. $f(x,y)=\log_3\left(-x^2-y^2+1\right)+\frac{1}{\sqrt{1-x-y}}+7^{\sqrt{-xy}}$

פתרון:

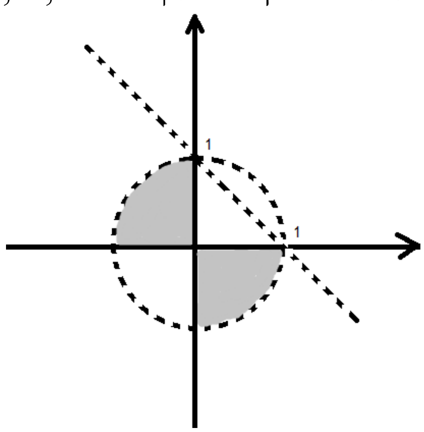
$$D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| -x^2-y^2+1>0 \ and \ 1-x-y>0 \ and \ -xy\geq 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2<1 \ and \ y<1-x \ and \ xy\leq 0\right\}$$

א. $x^2+y^2<1$ זהו עיגול עם מרכז בנקודה $(0,0)$ ורדיוס 1 לא כולל מעגל (פנים העיגול לא כולל שפה).

ב. $y<1-x$ זהו תחום מתחת לישר $y=1-x$ לא כולל ישר עצמו.

ג. $xy\leq 0$ זהו תחום של הרביע השני והרביע הרביעי איפה ש- x ו- y בעלי סימנים הפוכים.

תחום ההגדרה של הפונקציה הינו חיתוך של הקבוצות א', ב', ג'.



(התחום האפור בציור)