בוחן לינארית 1 קיץ תשפא-פתרון

1.8.2021 , כ"ג אב תשפ"א

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחן: שעה ורבע.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 102 נקודות

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (15 נקודות לסעיף) תהא $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. **הוכיחו או הפריכו:**

(א) אם קיימת $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $R_5(AB^t) = 0$ אז $R_5(A) = 0$.

פתרון:

הפרכה. ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \ B = A^t$$

אזי: $AB^t = A^2 = 0$ ובפרט $R_5(AB^t) = 0$ אבל השורה החמישית של A שונה מאפס.

(ב) אם קיימת $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $R_5(B^tA) = 0$ אז A אינה הפיכה.

פתרון:

הפרכה. ניקח

$$B = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}^t, \ A = I$$

אזי: $R_5(B^tA) = 0$ אבל A הפיכה.

(ג) אם $R_5(AA^t) = 0$ אז $R_5(A) = 0$.

פתרון:

הוכחה: מהנתון $R_5(AA^t) = 0$ בפרט נסיק כי $(AA^t)_{5,5} = 0$. נחשב

$$0 = \left(AA^t\right)_{5,5} = \sum_{k=1}^{5} A_{5,k}\left(A^t\right)_{k,5} = \sum_{k=1}^{5} A_{5,k}A_{5,k} = \sum_{k=1}^{5} \left(A_{5,k}\right)^2$$

ומכיוון שזה סכום של מספרים אי-שליליים (מספר ממשי בריבוע הוא ≥ 0) ששווה לאפס, נקבל שלכל $0 \leq k \leq 5$ מתקים כי $\left(A_{5,k}\right)^2 = 0$ (כלומר, כל אחד מהמחוברים שווה אפס) ולכן לכל $1 \leq k \leq 5$ מתקיים ש $A_{5,k} = 0$, כלומר $R_5(A) = 0$ כנדרש.

(ד) אם $R_5(A^tA) = 0$ אז A אינה הפיכה.

פתרון:

כיוון ש $R_5(AA^t) = 0$ נסיק כי AA^t אינה הפיכה ולכן או ש A אינה הפיכה או ש A^t אינה הפיכה (אם כפל מטריצות אינו הפיך אז אחת מהמטריצות בכפל אינה הפיכה). מכיוון ש A^t אינה הפיכה גורר ש A אינה הפיכה נקבל ש:

AA^t אינה הפיכה $\Leftarrow$ (A אינה הפיכה או ש A^t אינה הפיכה) $\Leftarrow$ (A אינה הפיכה או ש A אינה הפיכה) $\Leftarrow$ A אינה הפיכה כנדרש.

2. (7 נקודות לכל אחד מ 6 תתי הסעיפים).

עבור המטריצה הממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ענו על הסעיפים הבאים:

(א)

- מצאו b_1 כך שלמערכת $Ax = b_1$ יש פתרון יחיד. אם לא קיים b_1 כזה, הוכיחו זאת.
- מצאו b_2 כך שלמערכת $Ax = b_2$ אין פתרון. אם לא קיים b_2 כזה, הוכיחו זאת.
- מצאו b_3 כך שלמערכת $Ax = b_3$ יש יותר מפתרון אחד. אם לא קיים b_3 כזה, הוכיחו זאת.

פתרון:

נסמן $b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונראה מתי (באילו תנאים) יש פתרון יחיד/אין פתרון/יש אינסוף פתרונות למערכת $Ax = b$.

נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & y \\ 5 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-5R_1]{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & y-3x \\ 0 & -4 & z-5x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & y-3x \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{array}\right)$$

ולכן כאשר $z+x-2y=0$ נקבל כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד (כי נקבל צורה מדורגת, ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים). למשל עבור $b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. כאשר $z+x-2y\neq 0$ אין פתרון (כי יש שורת סתירה). למשל עבור $b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. כיסינו את כל המקרים ולכן לא קיימת אפשרות ליותר מפתרון אחד ולכן לא קיים b_3 הנדרש בתת-הסעיף השלישי.

(ב) עבור W_1, W_2, W_3 הבאים, קבעו האם הוא ת"מ. אם כן, הוכיחו. אם לא, נמקו מדוע.

- W_1 המוגדר להיות כל הוקטורים b_1 המקיימים כי למערכת $Ax=b_1$ יש פתרון יחיד.
- W_2 המוגדר להיות כל הוקטורים b_2 המקיימים כי למערכת $Ax=b_2$ אין פתרון.
- W_3 המוגדר להיות כל הוקטורים b_3 המקיימים כי למערכת $Ax=b_3$ יש יותר מפתרון אחד.

פתרון:

ראינו בסעיף הקודם כי

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid z+x-2y=0\right\}$$

וזהו תת מרחב כי זה אוסף הפתרונות למערכת ההומגנית $z+x-2y=0$. בנוסף W_2 אינו תת מרחב כי ראינו ש

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid z+x-2y\neq 0\right\}$$

ובפרט וקטור האפס לא שייך ל W_2. כמו כן, $W_3=\emptyset$ גם כן אינו תת מרחב כי וקטור האפס לא שייך לו.