לינארית 1 - תרגיל 2 - שדות

10.2018

בראש העבודה שלכם יש צורך לרשום את הפרטים הבאים:

1. **שם מלא + ת.ז (כבר קרה שהיו שני סטודנטים עם אותו שם פרטי ושם משפחה).**
2. **מספר תרגיל.**
3. **שם מתרגל/מספר קבוצה.**

תרגיל 1. נתון שדה בן 4 איברים $\mathbb{F} = \{0, 1, a, b\}$, כאשר 0 הוא איבר נייטרלי לחיבור ו-1 איבר נייטרלי לכפל, השלימו את טבלאות החיבור והכפל

$+$	0	1	a	b
0	0			
1		0	b	a
a			0	
b				0

$*$	0	1	a	b
0	0			
1		1		
a			b	1
b				a

פתרון.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$*$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

תרגיל 2.

1. האם $\mathbb{Z}_6$ עם פעולות החיבור והכפל מודולו 6 הוא שדה? נמק.

פתרון.

כידוע $\mathbb{Z}_n$ הוא שדה אם ורק אם nהוא ראשוני, היות ו-6 אינו ראשוני $\mathbb{Z}_6$ אינו שדה.
נשים לב שלמחלקים של 6, שהם 2,3, אין הופכי.

2. מצא את האיבר הנגדי וההופכי של כל איבור ב-$\mathbb{Z}_6$ (אם קיימים).

פתרון.

נגדיים

$$\begin{gathered} -0=0 \\ -1=5 \\ -2=4 \\ -3=3 \\ -4=2 \\ -5=1 \end{gathered}$$

הופכיים

$$\begin{gathered} 0^{-1}=\phi \\ 1^{-1}=1 \\ 2^{-1}=\phi \\ 3^{-1}=\phi \\ 4^{-1}=\phi \\ 5^{-1}=5 \end{gathered}$$

תרגיל 3. פתור את המשוואאות הבאות מעל $\mathbb{Z}_{11}$

1. $5x+3=2$

פתרון. נפתור את המשוואה על ידי הוספת נגדי של 3 והכפלה בהופכי של 5

$$\begin{gathered} 5x+3=2 \quad / \quad +8 \\ \downarrow \\ 5x=10 \quad / \quad *9 \\ \downarrow \\ x=2 \end{gathered}$$

2. $x^2=5$

פתרון. אין אופציה אחרת מאשר לבדוק את כל האופציות:

$$\begin{gathered} 0^2=0 \mod 11=0 \\ 1^2=1 \mod 11=1 \\ 2^2=4 \mod 11=4 \\ 3^2=9 \mod 11=9 \\ 4^2=16 \mod 11=5 \\ 5^2=25 \mod 11=3 \\ 6^2=36 \mod 11=3 \\ 7^2=49 \mod 11=5 \\ 8^2=64 \mod 11=9 \\ 9^2=81 \mod 11=4 \\ 10^2=100 \mod 11=1 \end{gathered}$$

לכן $x=4,7$

תרגיל 4. הוכח ש-$\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{a+b\sqrt{3}|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ עם הכפל והחיבור הרגילים של $\mathbb{R}$ הוא שדה.

פתרון. נפתור את המשוואה על ידי הוספת נגדי של 3 והכפלה בהופכי של 5

$$\begin{array}{c c c} 5x+3=2 & / & +8 \\ \downarrow & & \\ 5x=10 & / & *9 \\ \downarrow & & \\ x=2 & & \end{array}$$

אין מנוס מלהוכיח את כל האקסיומות!!

1. סגירות לחיבור: יהיו $a+b\sqrt{3},c+d\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(c+d\sqrt{3}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$$

2. סגירות לכפל: יהיו $a+b\sqrt{3},c+d\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)*\left(c+d\sqrt{3}\right)=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$$

3. חילוף לחיבור: יהיו $a+b\sqrt{3},c+d\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(c+d\sqrt{3}\right)=a+b\sqrt{3}+c+d\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}+a+b\sqrt{3}=\left(c+d\sqrt{3}\right)+\left(a+b\sqrt{3}\right)$$

4. חילוף לכפל: יהיו $a+b\sqrt{3},c+d\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)*\left(c+d\sqrt{3}\right)=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}==\left(c+d\sqrt{3}\right)*\left(a+b\sqrt{3}\right)$$

5. נייטרלי לחיבור: לכל $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ ניקח $0+0\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(0+0\sqrt{3}\right)=\left(a+b\sqrt{3}\right)=\left(0+0\sqrt{3}\right)+\left(a+b\sqrt{3}\right)$$

6. נייטרלי לכפל: לכל $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ ניקח $1+0\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)*\left(1+0\sqrt{3}\right)=\left(a+b\sqrt{3}\right)=\left(1+0\sqrt{3}\right)+\left(a+b\sqrt{3}\right)$$

7. נגדי לחיבור: לכל $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ ניקח $-a-b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(-a-b\sqrt{3}\right)=\left(0+0\sqrt{3}\right)$$

8. הופכי לכפל: לכל $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$ ניקח $\frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$אז

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)*\left(\frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{a-3b^2}{a^2-3b^2}+\frac{ba-ab}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\right)=\left(1+0\sqrt{3}\right)$$

9. את הפילוג הקיבוץ אני משאיר לכם.

בהצלחה!!