תרגול 6

1. תרגיל: T_3 הוא תורשתי (גם T_0, T_1, T_2 תורשתיות. T_4 תורשתי רק לקבוצות סגורות). כלומר, יהא (X,τ) מ"ט אזי כל תת מרחב A הוא גם T_3.

2. תרגיל: הוכח/הפרך: תמונה רציפה של T_2 היא T_2. כלומר, אם $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ רציפה ועל, ו(X,τ) הוא T_2, האם בהכרח (Y,σ) הוא T_2?

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי אינסופי ו Y מרחב טופולוגי עם תכונת T_2, ותהא $f : (X, \text{cof}) \to (Y,\tau)$ רציפה. הוכיחו כי f קבועה.

פנים וסגור

1. הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט ו$A \subseteq X$ תת קבוצה. . הסגור של A מסומן $cl(A) = \bar{A} = \cap_{A\subseteq S} S$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A. הפנים של A מסומן $int(A) = \mathring{A} = \cup_{O\subseteq A} O$ הקבוצה הפתוחה המקס' שמוכלת ב A.

   (א) דוגמא: $A = [0,1)$ ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית. הפנים הוא $(0,1)$ והסגור הוא $[0,1]$

   (ב) שימו לב שקבוצה היא בגורה אמ"ם היא שווה לסגור שלה, ופתוחה אמ"ם היא שווה לפנים שלה.

   (ג) הוכח/הפרך: $\overline{\cap A_i} = \cap \bar{A}_i$.

   (ד) הוכח/הפרך: $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$.

   (ה) טענה: $A \subseteq \mathbb{R}$ בת מניה אזי $\mathring{A} = \emptyset$.

   (ו) משפט: $p \in \bar{A}$ אמ"מ לכל סביבה פתוחה $p \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

   (ז) משפט: $p \in int(A)$ אמ"ם קיימת O פתוחה $p \in O \subseteq A$.

   (ח) טענה: $\bar{A}^c = \mathring{A^c}$.

   (ט) תרגיל: יהי $(X, \tau_{co-finite})$. לכל תת קבוצה A מתקיים כי: או שA פתוחה, או ש$int(A) = \emptyset$.

2. הגדרה: $A \subseteq X$ נקראת צפופה ב X אם $\bar{A} = X$.

3. הערה: קבוצה היא צפופה אמ"ם החיתוך שלה עם כל קבוצה פתוחה לא ריקה הוא לא ריק.

4. תרגיל: בטופולוגיה הקוסופית על מרחב אינסופי, כל קבוצה אינסופית היא צפופה.

5. תרגיל: (X, τ) מ"ט. $A \subseteq Y \subseteq X$ אזי $cl_Y(A) = Y \cap cl_X(A)$

6. תרגיל :האם $int_Y(A) = Y \cap int_X(A)$? פתרון: לא. למשל: הפנים של $\mathbb{Q}$ ב$\mathbb{R}$ הוא קבוצה ריקה. אבל הפנים של $\mathbb{Q}$ בעצמו זה $\mathbb{Q}$.

7. תרגיל: יהיו Y בעל תכונה T_2 ויהיו $f, g : X \to Y$ רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f = g$.

8. הגדרה: ספרביליות: X נקרא ספרבילי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה. דוגמאות: כל מרחב קו-סופי.

   (א) הערה: הטופולוגיה הקומנייתית על קבוצה X שאינה בת מניה היא לא ספרבילית. הסבר: תהי $A \subseteq X$ תת קבוצה בת מניה. לפי הגדרת הטופולוגיה, A סגורה. לכן $\bar{A} = A$. בפרט, A לא צפופה.

9. תרגיל: ספרביליות אינה תכונה תורשתית.

10. תרגיל: יהא (X, τ) מ"ט. אזי הוא T_3 אמ"מ T_1 וכן לכל $x \in U \in \tau$ קיימת V פתוחה כך ש $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$