

## תרגיל בית 7 אלגברה מופשטת 2

1. הוכיחו או הפריכו עבור תח"ש  $S \subseteq R$  :

(א) כל איבר אי-פריק ב  $S[x]$  הוא אי-פריק ב  $R[x]$ .

(ב) כל איבר אי-פריק ב  $R[x]$  הוא אי-פריק ב  $S[x]$ .

2. חוג  $R$  נקרא reduced אם לכל  $x \in R$ ,  $x = 0 \iff x^2 = 0$ .

(א) הוכיחו כי חוג קומוטטיבי הוא reduced אם"ם אין בו איברים נילפוטנטים פרט ל-0.

(ב) הוכיחו כי חוג קומוטטיבי הוא תח"ש אם"ם הוא reduced וחיתוך של כל שני אידיאלים לא אפסיים הוא לא אפס.

3. (א) הוכיחו כי בחוג  $\mathcal{O}_d$ , אם איברים  $x, y$  הם חברים אז  $N(x) = \pm N(y)$ .

(ב) הסיקו כי  $3 + \sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  הם לא חברים.

(ג) תנו דוגמא לאיברים בעלי אותה נורמה, שהם לא חברים ולא צמודים זה לזה.

4. יהי  $d \in \mathbb{Z}$  חופשי מריבועים, ונתבונן בחוג

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z})$$

(א) הוכיחו כי  $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow S$  המוגדר ע"י  $\varphi(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}$  הוא איזומורפיזם של חוגים.

(ב) הוכיחו כי אם  $d \equiv 1 \pmod{4}$  אז  $\varphi: \mathcal{O}_d \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b\frac{d-1}{4} & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  הוא איזומורפיזם.

(ג) חשבו מהי התמונה של הנורמה של איבר כללי ב- $\mathcal{O}_d$  (כלומר מהו  $\varphi(N(x))$  עבור איבר כללי  $x \in \mathcal{O}_d$  בכל אחד מהמקרים  $d \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$ ).

5. נתבונן בחוג  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  ובאידיאל  $I = \langle -5 + \sqrt{3} \rangle$ .

(א) הוכיחו כי בחוג המנה  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I$  יש 22 איברים.

(ב) נגדיר  $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}_{11}$  ע"י  $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a + 5b$ . השתכנעו שזהו איפמורפיזם.

(ג) הוכיחו כי  $I \subsetneq \ker \varphi$ .

(ד) הוכיחו כי  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/\langle -5 + \sqrt{3}, 11 \rangle \cong \mathbb{Z}_{11}$ .

6. קבעו ונמקו האם האיברים הבאים הם אי-פריקים בחוג המצויין, באם הם פריקים-מצאו פירוק שלהם:

(א) 7 בחוג  $\mathbb{Z}[i]$ .

(ב)  $1 + 3i$  בחוג  $\mathbb{Z}[i]$ .

(ג) 23 בחוג  $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ .

7. מצאו את כל הפתרונות או הוכיחו כי אין פתרונות מעל  $\mathbb{Z}$  למשוואות:

$$(א) \quad x^2 + y^2 = 3z^2$$

$$(ב) \quad x^2 + 1 = y^3$$

$$(ג) \quad x^2 + 19 = y^3$$