טופולוגיה – תרגול 1

14 במרץ 2021

תהי X קבוצה. מטריקה על X היא פונקציה $d: X \times X \to \mathbb{R}$ המקיימת:
1. אי שליליות: $d(x,y) \geq 0$ ו־ $d(x,y)=0 \iff x=y$.
2. סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$
3. אי שוויון המשולש: $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

–

$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$, נוכיח שזו מטריקה אמ"מ f חח"ע.
ברור שיש סימטריות, אי"ש המשולש:

$$d_f(x,z)=|f(x)-f(z)|=|f(x)-f(y)+f(y)-f(z)| \leq$$
$$|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)|=d_f(x,y)+d_f(y,z)$$

ברור ש־ d_f אי־שלילית ואכן $d_f(x,x)=|f(x)-f(x)|=0$.
$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)| \neq 0$ לכל $x \neq y$, אמ"מ f חח"ע.

–

$A \Delta B=\emptyset$ אמ"מ $A=B$.

–

הגדרה: אולטרה מטריקה היא מטריקה, רק שמחזקים את תנאי 3:

$$d(x,z) \leq max\{d(x,y),d(y,z)\}$$

–

הגדרה: הנורמה ה־p אדית על $\mathbb{Z}$ מוגדרת כך:

$$||x||=p^{-max\{k:p^k|x\}}$$

המטריקה ה־p אדית על $\mathbb{Z}$ היא:

$$\begin{cases} d(x,y)=p^{-k(x,y)} & x \neq y \\ d(x,y)=0 & x=y \end{cases}$$

כאשר $k(x,y)=max\{k:p^k|x-y\}$.

–

למשל: בנורמה ה־3 אדית, $||18||=3^{-2}=\frac{1}{9}$,
במטריקה ה־3 אדית: $d(18,30)=\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$.
נוכיח שזו אולטרה מטריקה.
תנאי 1: מתקיים ישירות מההגדרה.

תנאי 2: $d(x,y)=p^{-k(x,y)}=p^{-k(y,x)}=d(y,x)$.
תנאי 3: רוצים להראות ש־$d(x,z)\leq max\{d(x,y),d(y,z)\}$, כלומר:

$$p^{-k(x,z)}\leq max\{p^{-k(x,y)},p^{-k(y,z)}\}$$

שקול להראות

$$p^{k(x,z)}\geq min\{p^{k(x,y)},p^{k(y,z)}\}$$

וזה מתקיים כי

$$x-z=(z-y)+(y-z)$$

–

טענה: כל נורמה משרה מטריקה: $||x-y||=d(x,y)$.

–

מ"פ ← נורמה ← מטריקה ← טופולוגיה

–

הגדרה: מרחק בין נקודה לקבוצה: $d(x,A)=inf\{d(x,y):y\in A\}$

–

הגדרה: קבוצה חסומה אמ"מ הקוטר שלה סופי:

$$diam(A)=sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$$

–

הגדרה: $B(x,r)=\{y|d(x,y)<r\}$ כדור פתוח
$B[x,r]=\overline{B(x,r)}=\{y|d(x,y)\leq r\}$ כדור סגור

–

$diam(A)=r$ ולכן לכל $a'\in A$ מתקיים: $d(a,a')\leq r$