פתרון תרגיל 7 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. נתבונן בפרמטריזציה הבאה של מישור xy:

$$X(u,v) = (u,v,0)$$

כאשר $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1,0,0), X_v = (0,1,0)$$

מכיוון שהוקטורים אורתונורמליים, נקבל:

$$g_{11} = X_u \cdot X_u = 1, g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_v = 0, g_{22} = X_v \cdot X_v = 1$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, אם נגזור מי מאיברי (g_{ij}) נקבל 0, ולכן:

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

לכל $1 \le i,j,k \le 2$.

2. נזכור שהתבנית היסודית הראשונה של משטח סיבוב היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$(g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2(s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial(g_{ij})}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial(g_{ij})}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2r(s)r'(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם כן,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2}g^{12}(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}) + \frac{1}{2}g^{12}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}\frac{2r(s)r'(s)}{r^2(s)}$$

כלומר $\Gamma_{12}^{1}=\frac{r'}{r}$. לכן גם $\Gamma_{21}^{1}=\frac{r'}{r}$. כמו כן, $\Gamma_{22}^{1}=0$.
באופן דומה מחשבים את Γ_{ij}^{2}:

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=r\left(s\right)r'\left(s\right)$$

$$\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,2}+g_{12,1}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,2}+g_{22,1}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{21,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

3. טורוס וספירת היחידה הם משטחי סיבוב, ולכן אפשר להשתמש בשאלה הקודמת כדי לחשב את מקדמי כריסטופל שלהם.
למשל, המטריקה של הטורוס:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(2+\cos\phi\right)\cos\theta,\left(2+\cos\phi\right)\sin\theta,\sin\theta\right)$$

למשל, היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\left(2+\cos\phi\right)^{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ושל ספירת היחידה:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\sin^{2}\phi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

מציבים בנוסחאות שמצאנו בשאלה הקודמת ומקבלים את המקדמים המתאימים, בהצלחה.

4. נשתמש בתכונות השונות של המחוברים.

(א) נזכור שמתקיים:

$$X_{ij}=\Gamma_{ij}^{1}X_{1}+\Gamma_{ij}^{2}X_{2}+b_{ij}\vec{n}$$

ולכן:

$$\left\langle X_{ij},X_{k}\right\rangle=\left\langle \Gamma_{ij}^{1}X_{1}+\Gamma_{ij}^{2}X_{2}+b_{ij}\vec{n},X_{k}\right\rangle=\Gamma_{ij}^{1}\left\langle X_{1},X_{k}\right\rangle+\Gamma_{ij}^{2}\left\langle X_{2},X_{k}\right\rangle+b_{ij}\left\langle \vec{n},X_{k}\right\rangle=$$

הנורמל $\vec{n}$ מאונך לוקטור הנגזרות X_{k} ולכן:

$$=\Gamma_{ij}^{1}\left\langle X_{1},X_{k}\right\rangle+\Gamma_{ij}^{2}\left\langle X_{2},X_{k}\right\rangle=\Gamma_{ij}^{1}g_{1k}+\Gamma_{ij}^{2}g_{2k}=\Gamma_{ij}^{s}g_{sk}$$

(ב) נגזור לפי כלל לייבניץ:

$$g_{ij,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}=\frac{\partial}{\partial u^{k}}\left\langle X_{i},X_{j}\right\rangle=\left\langle X_{ik},X_{j}\right\rangle+\left\langle X_{i},X_{jk}\right\rangle$$

נגזרת לפי u^{k} פירושה לגזור לפי המשתנה ה־k כמובן.

5. בפשטות לא. אפשר להתבונן במשטחים שהמטריקות שלהם הן:

$$\left(g_{ij}\right)_{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\left(g_{ij}\right)_{2}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

שמתאימות למשל לגלילים עם רדיוסים שונים.
מקדמי כריסטופל בשני המטריקות מתאפסים כולם, אך הן בוודאי לא זהות.

6. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, \cosh\phi)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi = \cosh 2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh 2\phi \end{pmatrix}$$

נחשב את מקדמי כריסטופל.
אנחנו צריכים את:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh 2\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} \sinh 2\phi & 0 \\ 0 & 2\sinh 2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = \tanh\phi$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = -\tanh 2\phi$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = -\frac{1}{2}\tanh 2\phi$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = \tanh 2\phi$$