אינפי 2 - תרגיל מספר 5

חשבו את האינטגרלים הבאים ופשטו את התשובה בצורה הטובה ביותר:

.1 $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$

פתרון:

קודם כל נפריד את השבר לסכום של שברים: $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$

ולכן $A(x+2)(x+4)^2 + B(x+4)^2 + C(x+4)(x+2)^2 + D(x+2)^2 = x^2$ ולכן

$A=-2, B=1, C=2, D=4$ ולכן

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx = \int \left[\frac{-2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2}\right]dx = -2\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| - 4\frac{1}{x+4} + C$$

.2 $\int \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$

פתרון:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ולכן $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ ולכן $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ו $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$.

נכפיל את שתי המשוואות האחרונות לקבל $\int \sin^6 x\cos^2 x dx = \int \sin^4 x\sin^2 x\cos^2 x dx =$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 \frac{1}{4}\sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\left[\int \sin^2 2x dx - \int 2\cos 2x\sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x\sin^2 2x dx\right].$$

נחשב כל אחד מן האינטגרלים:

$\cos 4x = \cos 2\cdot 2x = 1-2\sin^2 2x$ ולכן $\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\int 2\cos 2x \sin^2 2xdx$, נבצע הצבה $t = \sin 2x$ ולכן $dt = 2\cos 2xdx$ ונקבל

$$\int 2\cos 2x\sin^2 2xdx = \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 2x + C$$

$\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \cos^2 2x\sin^2 2x$ אבל $\cos 8x = 1-2\sin^2 4x$ ולכן

$$\int \cos^2 2x\sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \sin^2 4xdx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 8x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

נציב את כל התוצאות האלה לקבל את התשובה הסופית.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3}sinx+cosx}$ (רמז : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

פתרון:

נשתמש ברמז, ובעובדה ש $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ לקבל

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x} = \frac{1}{2\sin(x+\frac{\pi}{6})}$$ נבצע

הצבה $u = x + \frac{\pi}{6}$ לקבל $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \int \frac{du}{2\sin u}$

$t = \tan\frac{u}{2}$ ולכן $du = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ ולכן $\int \frac{du}{2\sin u} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$ ולכן סה"כ

התשובה הסופית הינה $\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})\right| + C$

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ (רמז : הצבה טריג' היפרבולית)

פתרון:

$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tanh=\frac{\sinh}{\cosh}, c\tanh=\frac{\cosh}{\sinh}$. קל מאד לוודא את העובדות הבאות: $\sinh'=\cosh, \cosh'=\sinh, \cosh^2-\sinh^2=1$, $c\tanh'(x)=-\frac{1}{\sinh^2 x}$. ניתן להוכיח מתוך זה ש $arc\sinh'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ נציב לכן $t=arc\sinh(x), x=\sinh t$ ולכן $dt=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ולכן

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{dt}{\sinh^2 t}=-c\tanh t+C$$

$$\frac{\cosh}{\sinh}(\arcsin h(x))=\frac{\cos(\arcsin h(x))}{x}=\frac{\sqrt{\cosh^2(\arcsin h(x)}}{x}=\frac{\sqrt{1+\sinh^2(\arcsin h(x))}}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

ולכן $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

(שימו לב שלא התייחסנו לתחום ההגדרה של ההצבה שביצענו. אך במקרה זה אין לנו צורך להתייחסות זו, כי קל לוודא שזו אכן התשובה הנכונה פשוט על ידי גזירת התשובה שתתן לנו את הפונקציה באינטגרל המקורי.)

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, בעזרת הצבת אוילר מתאימה ($t=\pm x+\sqrt{a^2+x^2}$ ...) .

פתרון:

נציב $t=x+\sqrt{a^2+x^2}$ ולכן $x=\frac{t^2-a^2}{2t}$, $dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$, $\sqrt{a^2+x^2}=t-x=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t}$

ולכן נקבל $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2+a^2}{2t}}\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$

6. * $\int\frac{dx}{\sqrt{-3-4x-x^2}}$ (רמז: השלמה לריבוע)

פתרון:

$\int\frac{dx}{\sqrt{-3-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin(t)+C=\arcsin(x+2)+C$ עבור $t=x+2$

7. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+4}$

פתרון:

נבצע הצבה $x=t^2$ ולכן $dx=2tdt$ ולכן

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+4}=\int\frac{t}{t^2+4}2tdt=2\int\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=2t-2\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}=2\sqrt{x}-4\int\frac{du}{u^2+1}=2\sqrt{x}-4\arctan u+C=$$

$$=2\sqrt{x}-4\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+C$$