מערכת של פונקציות סתומות

הכוונה למקרה פרטי של משפט הפונקציה הסתומה.

דוגמה

הוכיחו שקיימות פונקציות $u(x,y), v(x,y), w(x,y)$ דיפרנציאביליות בסביבת $(1,1)$ כך ש

$$\begin{cases} u^5+xv^2-y+w=2 \\ v^5+yu^2-x+w=2 \\ w^4+y^5-x^4=1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} u(1,1)=1 \\ v(1,1)=1 \\ w(1,1)=1 \end{matrix}$$

פתרון

נבנה פונקציה $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$. נגדיר פונקציות באופן הבא:

$$f_1(x,y,u,v,w)=u^5+xv^2-y+w-2$$

$$f_2(x,y,u,v,w)=v^5+yu^2-x+w-2$$

$$f_3(x,y,u,v,w)=w^4+y^5-x^4-1$$

נגדיר את f באופן הבא: $f(x,y,u,v,w)=(f_1,f_2,f_3)$ (שאכן מוגדרת מ$\mathbb{R}^5$ ל$\mathbb{R}^3$)

נבדוק את התנאים למשפט הפונקציה הסתומה:

$f(\vec{p})=0$ במקרה שלנו נקבל $\vec{p}=(1,1,1,1,1)$ לפי הנתון! ניתן לראות שעבור הנקודה הנ"ל $f(1,1,1,1,1)=0$. ברור כי הפונקציות גזירות ורציפות שם, כלומר $f\in C^1(\mathbb{R}^5)$, כי f_1,f_2,f_3 הם פולינומים ולכן בC^1. נגזור:

$$\begin{vmatrix} f'_{1u} & f'_{1v} & f'_{1w} \\ f'_{2u} & f'_{2v} & f'_{2w} \\ f'_{3u} & f'_{3v} & f'_{3w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5u^4 & 2xv & 1 \\ 2yu & 5v^4 & 1 \\ 0 & 0 & 4w^3 \end{vmatrix}$$

נציב הנקודה p ונקבל $0 \neq 84 \models|$ לפי משפט הפונקציה הסתומה מגדירות את u,v,w כפונקציות סתומות יחידות של x וy בנקודה $(1,1)$. ברור שעבור סביבה של נקודה $\vec{p}$ המשוואות והפונקציות u,v,w יחידות.

מישור משיק למשטח

משטח ב$\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. נניח כי $f\in C^1$ עבור u בסביבת p_0.

<u>אז</u> משוואת המישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0:

$$f'_x(p_0)(x-x_0)+f'_y(p_0)(y-y_0)+f'_z(p_0)(z-z_0)=0$$

הנורמל במקרה זה של המישור הוא $(f'_x(p_0),f'_y(p_0),f'_z(p_0))$.

דוגמה

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בp_0 מקביל למישור $x+y+z=1$.

פתרון

נבחר נקודה $p=(x_0,y_0,z_0)$ כללית במשטח זה. נגדיר פונקציה f באופן הבא:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

נמצא נגזרות חלקיות:

$$f'_x=2x, f'_y=2y, f'_z=-2z$$

הפונקציות רציפות ב$C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ ולכן הנורמל למשירו בנקודה $(2x,2y,-2z)$. עכשיו נציב בנקודה p ונקבל $(2x_0,2y_0,-2z_0)$. כזכור כדי שמישורים יהיו מקבילים דרוש שוקטורי הנורמל יהיו תלויים לינארית.

ברור שהנורמל של המישוי השני הוא $(1,1,1)$(מצאנו מהמשוואה $x+y+z=1$ קל לראות שאלו המקדמים) ולכן צריכים להתקיים המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \dfrac{2x_0}{1}=a \\ \dfrac{2y_0}{1}=a \\ \dfrac{-2z_0}{1}=a \end{cases}$$

נקבל

$$(*)\quad x_0=\frac{a}{2}, y_0=\frac{a}{2}, z_0=-\frac{a}{2}$$

כזכור הנקודה (x_0,y_0,z_0) נמצאת על המשטח $x^2+y^2-z^2=1$ ולכן מתקיים $x_0^2+y_0^2-z_0^2=1$.

נשאר להציב את x_0, y_0 וz_0 שמצאנו במשוואת המשטח:

$$\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=1$$

$$\frac{a^2}{4}=1$$

$$\boxed{a=\pm 2}$$

קל לראות שיהיו שתי נקודות שיקיימו זאת:

$$p_1=(1,1,-1)$$

$$p_2=(-1,-1,1)$$

(ב)

מצא את משוואת המישור המשיק בנקודות הנ"ל

פתרון

עבור הנקודה p_1

$$2\cdot 1\left(x-1\right)+2\cdot 1\left(y-1\right)-2\left(-1\right)\left(z+1\right)=0$$

באופן דומה עבור הנקודה p_2 .

$$2\left(-1\right)\left(x+1\right)+2\left(-1\right)\left(y+1\right)-2\left(1\right)\left(z-1\right)=0$$

נקודות קיצון עם אילוצים

דוגמה 1

מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $z=x^2+y^2$ עם האילוץ $x+y=1$

פתרון

במקרה הנ"ל קל לחלץ את y, כלומר $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x$. נציב זאת במשוואה של $z\left(x,y\right)$ ונקבל

$$z=x^2+y^2=x^2+\left(1-x\right)^2=x^2+1-2x+x^2=2x^2-2x+1$$

את המשוואה קל לפתור ב-$\mathbb{R}$!!
נשים לב כי המשוואה $z=2x^2-2x+1$ היא משוואה עם נעלם אחד ולכן נגזור ונשווה לאפס:

$$z'_x=4x-2\Rightarrow 4x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

נבדוק האם היא מינ'/מקס: $z''_x=4>0$ ולכן מינימום!
(באופן דומה ניתן לקבוע בשאלה זו ע"פ פרבולה!)

לסיכום, הנקודה המבוקשת היא $x=\frac{1}{2}\wedge x+y=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$, אבל $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ולכן הקורדינטה הרצויה היא

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

נשים לב

בדוגמה האחרונה היה קל לחלץ את x, אבל ייתכן כי האילוצים למשל מוגדרים ע"י פונקציות סתומות ולכן נצטרך למצוא שיטה כללית טובה יותר!

שיטת כופלי לגרנז'

מחפשים נקודת קיצון לפונקציה f באילוצים הנ"ל:

$$f_1 = 0, ... f_k = 0$$

לשם כך מגדירים פונקציות לגרנז' באופן הבא:

$$L = f + \sum_{i=L}^{i=k} \lambda_i f_i$$

כאשר λ_i נקראים כופלי לגרנז'.

מוודאים נקודות קריטיות ע"י השוואת הנגזרת החלקית של L ל0. נקבל:

$$L'_{x_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$L'_{x_k} = 0$$

נקבל מכאן נקודות קריטיות. נניח שp_0 נקודה קריטית. נסתכל על התבנית הריבועית $d^2_{p_0}(L)$:

- אם $d^2_{p_0}(L) > 0$ ⇐ אז לf יש מינימום בp_0 באילוצים הנ"ל.
- אם $d^2_{p_0}(L) < 0$ ⇐ מקס'
- אם $d^2_{p_0}(L)$ הופכת סימן בסביבה של p_0 אז הנקודה היא אוכף.

דוגמה 2

מצאו נקודות קיצון של $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ עם האילוץ $x^2 + y^2 = 1$

פתרון

קל לראות שf_1 היא $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. נרשום:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 f_1(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$L(x,y)=6-4x-3y+\lambda_1\left(x^2+y^2-1\right)$$

נמצא נגזרות חלקיות:

$$L'_x=-4+2\lambda_1 x=0$$

$$L'_y=-3+2\lambda_1 y=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{4}{2\lambda_1},y=\frac{3}{2\lambda_1}$$

נציב באילוץ:

$$x^2+y^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{y}{2\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{3}{2\lambda_1}\right)^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2=\frac{25}{4}$$

$$\lambda_1=\pm\frac{5}{2}$$

נבדוק עבור כל λ_{1_A}, $1\leq A\leq 2$ בנפרד!:

עבור $\lambda_1=\frac{5}{2}$ נקבל $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$. ז"א הנקודה החשודה כקיצון במקרה זה היא $p_1=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

נבדוק בנקודה p_1 מהו הדיפרנציאל מסדר שני:(הדיפרנציאל של "2"!)

$$L''_{xx}=2\lambda_{1_1}=5$$

$$L''_{yy}=5$$

$$L''_{yx}=L''_{xy}=0$$

$$d^2_{p_1}L\left(h_1,h_2\right)=L''_{xy}\left(p_1\right)h_1^2+2L''_{xy}\left(p_1\right)h_1h_2+L''_{yy}\left(p_1h_2^2\right)=5h_1^2+5h_2^2>0$$

נשים לב: מהאילוץ $f_1\left(x,y\right)=0 \Leftarrow f_1\left(x,y\right)=x^2+y^2-1=0$ קל לראות שהדיפרנציאל מסדר ראשון שלו בנקודה p_1הוא אפס:

$$d^1_{p_1}f_1\left(h_1,h_2\right)=f'_{1x}\left(p_1\right)h_1+f'_{1y}\left(p_1\right)h_2=0$$

ניתן לבטא את h_1 כביטוי של

$$2\cdot\frac{4}{5}\cdot h_1+2\cdot\frac{3}{5}\cdot h_2=0$$

$$4h_1+3h_2=0$$

$$h_1=-\frac{3h_2}{4}$$

אפשר להציב זאת ב $5h_2^2+5\left(-\frac{3h_2}{4}\right)^2$ ואז לקבוע שהביטוי גדול מאפס!

מצאנו שהנקודה p_1 היא מינימום. באופן דומה נמצא את נקודה p_2.

תזכורת

מצאנו לפונקציה בלי אילוצים קריטריון מקוצר לקביעת מינ' מקס'. במקרה שלנו נשתמש בפונקצית לגרנז', כלומר הכללים יהיו הבאים:

נסתכל על הדטרמיננטה של פונקציית לגרנז'. נסמן $\begin{matrix}A=L''_{xx}\left(p_0\right)\\B=L''_{yx}\left(p_0\right)\\C=L''_{yy}\left(p_0\right)\end{matrix}$, $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\B & C\end{vmatrix}$:

- אם $\Delta>0$ וגם $A>0$ אז הנקודה מינימום
- אם $\Delta>0$ וגם $A>0$ אז הנקודה מקסימום
- אם $\Delta=0$ - לא ידוע, נבדוק מפורשות את הנקודה
- אם $\Delta<0$ ו$A\neq0$ אז הנקודה היא אוכף