הרצאה 11

משפט הבסיס של הילברט: אם R חוג נתרי משמאל/מימין, אז חוג הפולינומים $R[x]$ גם נתרי משמאל/מימין.

הוכחה: יהי $I \lhd R[x]$ אידאל שמאלי (עבור נתרי מימין ההוכחה דומה). צריך להוכיח כי I נוצר סופית.

לכל $n \in \mathbb{N}$ הגדרנו

$$J_n = \{ r \in R \mid r \text{ הינו המקדם המוביל של } f \in I,\ \deg f \le n \} =$$

$f(x) \in I$

$x^l f(x) \in I$

$$\{ r \in R \mid r \text{ הינו מקדם מוביל של } f \in I,\ \deg f = n \}$$

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \{ r \in R \mid r \text{ מקדם מוביל של } f \in I \}$$

הוכחנו כי $J_n, J \lhd R$ אידאלים שמאליים, לכן נוצרים סופית, כי R נתרי.

יהי $J=(r_1,\dots,r_k)$

נבחר $f_i\in I$ כך ש- r_i המקדם המוביל של f_i, לכל $1\le i\le k$. נבחר $N=\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_k\}$.

לכל $1\le j<N$ יהי $J_j=(r_{1j},\dots,r_{k_j j})$

יהי $f_{ij}\in I$ (לכל $1\le i\le k_j$) כך ש-

- $\deg f_{ij}=j$
- המקדם המוביל של f_{ij} הינו r_{ij}.

יהי $I'=(f_1,\dots,f_k, f_{ij})_{\substack{1\le j<N\\ 1\le i\le k_j}}$

ברור כי I' נוצר סופית וכי $I'\subseteq I$.
צריך להוכיח $I\subseteq I'$, ואז נקבל כי $I=I'$ נוצר סופית.

נניח בשלילה כי $I \neq I'$. אז קיים $g \in I$
נבחר g כזה מדרגה מינימלית.
כך ש- $g \notin I'$. נטפל בשני מקרים.

<u>מקרה 1</u> $\deg g \geq N$. אזי

$$g = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g \in I \Rightarrow a_n \in J \Rightarrow$$

$$a_n = b_1 r_1 + b_2 r_2 + \dots + b_k r_k$$

עבור $b_1, \dots, b_k \in R$ מתאימים, כאשר $r_1, \dots, r_k$ הם היוצרים של J שהגדרנו למעלה.

ויהי
$$h = b_1 x^{\deg g - \deg f_1} f_1 + b_2 x^{\deg g - \deg f_2} f_2 + \dots + b_k x^{\deg g - \deg f_k} f_k$$

כיוון ש- $\deg g \geq N > \deg f_i$

לכן $\deg g - \deg f_i > 0$

סך הכול: כל המחוברים של h מדרגה $n = \deg g$. המקדם המוביל הוא $b_1 r_1 + b_2 r_2 + \dots + b_k r_k = a_n$.

אזי $h = a_n x^n + \left(\text{מונומים ממעלה נמוכה יותר}\right)$. ברור כי $h \in I'$.

$$g = a_n x^n + \left(\text{———} \right)$$

לכן, $\deg(g-h) < \deg g$. מצד שני

$h \in I' \subseteq I \Leftarrow g-h \in I$. לפי המינימליות

של $\deg g$, מקבלים $g-h \in I'$. אזי

$$g = \underbrace{(g-h)}_{\in I'} + \underbrace{h}_{\in I'} \in I'$$, סתירה.

<u>מקרה 2</u> $\deg g = n < N$. אזי

$$g = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$a_n \in I_n$$

$$a_n = b_1 r_{1n} + \cdots + b_{k_n} r_{k_n,n}.$$

ניקח $h = b_1 f_{1n} + \cdots + b_{k_n} f_{k_n,n}$

אזי $h \in I'$, ל-h יש אותה מעלה

ואותו מקדם מוביל כמו ל-g. אזי

$\deg(g-h) < \deg g$, כמו קודם מקבלים סתירה.

מסקנה באינדוקציה: לכל $n\in\mathbb{N}$, בהינתן חוג נותרי משמאל/מימין R, חוג הפולינומים ב-n נעלמים $R[x_1,\dots,x_n]$ גם נותרי משמאל/מימין

הוכחה $R[x_1,\dots,x_{n-1}][x_n] = R[x_1,\dots,x_n]$.

מסקנה יהי F שדה. נזכיר כי $V\subset F^n$ הינה קבוצה אלגברית אם אפשר להגדיר אותה כקבוצה בה אינו אוסף של פולינומים מתאפס. כלומר,

יהי $S\subset F[x_1,\dots,x_n]$. $I=(S)$ האידיאל הנוצר ע"י S.

אזי $V=Z(I)=\{(a_1,\dots,a_n)\in F^n \mid f(a_1,\dots,a_n)=0$ לכל $f\in I\}$

לפי מה שעשינו הוכחנו, $F[x_1,\dots,x_n]$ נותרי (כי כל שדה נותרי) לכן I נוצר סופית: $I=(f_1,\dots,f_k)$.

לכן $V=\left\{(a_1,\dots,a_n)\in F^n \;\middle|\; \begin{matrix} f_1(a_1,\dots,a_n)=0 \\ \vdots \\ f_k(a_1,\dots,a_n)=0 \end{matrix}\right\}$

V מוגדרת על ידי ההתאפסות של מספר סופי של פולינומים.

<u>הגדרה</u> יהי R חוג. תהי $S\subset R$ תת-קבוצה.
התת-חוג הנוצר על ידי S הוא התת-חוג הכי קטן $R'\subseteq R$ כך ש- $S\subset R'$.

$$R'=\{s_{11}s_{12}s_{13}\cdots s_{1n_1}+s_{21}s_{22}\cdots s_{2n_2}+\dots+s_{k1}\cdots s_{kn_k} \mid s_{ij}\in S\cup\{1\}\cup(-S)\cup\{-1\}\}$$

<u>דוגמא</u> יהיו $R\subset T$ חוגים.
התת-חוג של T שנוצר מעל R על ידי קבוצה S הינו התת-חוג הנוצר על ידי $R\cup S$, כלומר התת-חוג הכי קטן של T שמכיל את R כתת-חוג וגם מכיל את S.

__דוגמא__ $R\subset T$ חוגים חילופיים.

יהי $t\in T$. החוג הנוצר על ידי t מעל R היינו

$$R[t]=\{r_0+r_1t+\dots+r_nt^n \mid n\geq 0,\ r_i\in R\}$$

חוג R' נקרא נוצר סופית מעל תת-חוג R אם הוא נוצר סופית מעל R כתת-חוג של עצמו

$R'=R[t_1,\dots,t_k]$, $t_i\in R'$.

__מסקנה__ יהי R חוג שנוצר סופית מעל חוג נתרי A (לדוגמא, מעל שדה, ומעל $\mathbb{Z}$). אזי R נתרי.

__הוכחה__

$$R=A[t_1,\dots,t_k]=\{\sum a_{i_1,\dots,i_k}t_1^{n_1}\cdots t_k^{n_k}\}.$$

דוגמא

$$R = \mathbb{Z}[x]/(x^3)$$

R נוצר מעל $\mathbb{Z}$ על ידי $t = x + (x^3)$

$$t^3 = x^3 + (x^3) = 0 + (x^3).$$

חוגים להוכחה נבחר הומומורפיזם

$$\varphi : \underbrace{A[x_1,\dots,x_k]}_{\text{חוג פולינומים ב-}k\text{ נעלמים מעל }A} \to R$$

$$\varphi(x_i) = t_i$$

$$\varphi(a) = a \quad \forall a \in A \subset R$$

$$\varphi\left(\sum a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}\right) = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_k} t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k}$$

לכן φ על, ולפי המשפט איזו' הראשון,

$$R \simeq A[x_1,\dots,x_k]/(\ker\varphi)$$

אבל הוכחנו A נתרי $\Leftarrow$ $A[x_1,\dots,x_k]$ נתרי,

אך מנה של חוג נתרי היא נתרית, לכן R נתרי.

תרגיל R נתרי משמאל/מימין ⇐ החוג $R[[x]]$ של טורי חזקות גם נתרי משמאל/מימין.

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k \right\}$$

$I \triangleleft R[[x]] \longrightarrow \{ r_k$ המקדם הלא-אפסים עם k מינימלי $\} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$$

הגדרה יהי R חוג (לא בהכרח חילופי). R-מודול שמאלי (ימני) הינו קבוצה M עם שני פעולות:

1) חיבור
$$M \times M \longrightarrow M$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 + m_2$$

2) כפל סקלרי:
$$R \times M \longrightarrow M$$
$$(r, m) \longmapsto rm$$

($M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto mr$ עבור מודול ימני)

כך ש- 1) M עם חיבור הינו חבורה אבלית.

2) לכל $r,s\in R$, $m\in M$

$$(r+s)m = rm+sm$$
$$r(sm) = rsm$$
$$1\cdot m = m$$

3) לכל $r\in R$, לכל $m,n\in M$

$$r(m+n)=rm+rn.$$

$$m(r+s)=mr+ms$$
$$(ms)r = m(sr)$$
$$m\cdot 1 = 1$$
$$(m+n)r = mr+n$$

עבור מודולים ימניים

הערה אם R חילופי, M R-מודול שמאלי, אזי הכפל (סקלרי) $mr = rm$ מעניק ל-M מבנה של R-מודול ימני.

דוגמאות 1) אם $F=R$ הינו שדה, אזי R-מודול $\Longleftrightarrow$ מרחב וקטורי מעל F

2) לכל חבורה אבלית M יש מבנה יחיד של $\mathbb{Z}$-מודול (שמאלי)

$$1\cdot m = m$$
$$n\cdot m = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ פעמים}}$$
$$\underbrace{-m+(-m)+\cdots+(-m)}_{-n \text{ פעמים}}$$

אם $n<0$.

3) $M = R^n = \{(r_1,\dots,r_n) : r_i \in R\}$

חיבור איבר-איבר

$r(r_1,\dots,r_n) = (rr_1, rr_2, \dots, rr_n)$.

מודול חופשי מעל R.

4) יהי M R-מודול. יהי $n\in\mathbb{N}$,

$M^n = \underbrace{M\times\cdots\times M}_{n \text{ עותקים}}$. באופן טבעי נתון ל-$M^n$

מבנה של $\underbrace{M_n(R)}_{\text{מטריצות } n\times n \text{ עם איברים ב-} R}$-מודול

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & \cdots & & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\in M_n(R)} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}}_{\in M^n} = \begin{pmatrix} r_{11}m_1 + r_{12}m_2 + \cdots + r_{1n}m_n \\ \vdots \\ r_{n1}m_1 + \cdots + r_{nn}m_n \end{pmatrix}$$

תרגיל קל: לבדוק שהאקסיומות של ההגדרה של מודולים מתקיימות.

להלן: R-מודול = R-מודול שמאלי, אלא אם נאמר בפירוש אחרת.