

## תרגיל בית 8 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** בכל סעיף קבעו ונמקו האם החבורות איזומורפיות. רמז כללי: סדרים של איברים.

1. החבורה  $\mathbb{Z}_{40}$  והחבורה  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4$ .

2. החבורה  $\mathbb{Z}_{33}$  והחבורה  $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3$ .

3. החבורה  $S_4$  והחבורה  $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ .

4. החבורה  $S_5$  והחבורה  $D_{60}$ .

5. החבורה  $\mathbb{C}^*$  והחבורה

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות (שכבר הראיתם שהיא חבורה).

**שאלה 2.** תהי  $G$  חבורה ותהי  $H \leq G$ . נגדיר את הליבה של  $H$  ב- $G$  להיות

$$\text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

1. הוכיחו כי  $\text{Core}(H) \leq G$ . רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת  $gHg^{-1} \leq G$  לכל  $g \in G$ .

2. הוכיחו ש- $\text{Core}(H)$  היא תת-חבורה הנורמלית הגדולה ביותר של  $G$  שמוכלת ב- $H$ .

3. תנו דוגמה לחבורה  $G$ , ולשתי תת-חבורות לא טריוויאליות  $H, K$  (הן לא  $G$  ולא  $\{e\}$ ) כך ש- $\text{Core}(H) = \{e\}$  וגם  $\text{Core}(K) = K$ .

**שאלה 3.** נגיד שחבורה היא פשוטה אם אין לה תת-חבורות נורמליות פרט לעצמה ול- $\{e\}$ . תהי  $G$  חבורה פשוטה. הוכיחו כי אם  $f: G \rightarrow H$  הוא הומומורפיזם אז הוא או שיכון (חח"ע) או ההעתקה הטריוויאלית (ששולחת כל איבר לאיבר היחידה).

**שאלה 4.** תהי  $G$  חבורה, ו- $A, B \leq G$ . הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  ו- $B$  תת-חבורות נורמליות ב- $G$ , אז  $A \cap B \triangleleft G$ .

**שאלה 5.** בסעיפים הבאים, קבעו האם  $H \triangleleft G$  (אין צורך לבדוק אם  $H$  היא תת-חבורה).

$$1. H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$$

$$H = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{F}^\times\}, G = GL_n(\mathbb{F}) \quad .2$$

$$H = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid AP = P\} \cdot P \in GL_n(\mathbb{F}) \text{ יחיד} \cdot G = GL_n(\mathbb{F}) \quad .3$$

$$H = \{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\} \cdot G = S_n \quad .4$$