# תרגיל בית 9 בקורס 89-214 סמסטר א' תשע"ד

**נהלים:** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך ההגשה הוא בשבוע המתחיל ב-19.1.2014 לתא 45 של חיים רוזנר בארון הימני.

**שאלה 1.** מבין שבע החבורות הבאות מסדר 40 מצאו איזו חבורות איזומורפיות אחת לשניה:

$$D_{10} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8, U_8 \times \mathbb{Z}_{10}, U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{40}$$

רמז: העזרו במשפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית.

**שאלה 2.** תהי $G$ חבורה. נסמן קבוצה של איברים $G^2 = \left\{g^2 : g \in G\right\}$. שימו לב שבחבורה חיבורית זו בעצם הקבוצה $2G = \{2g : g \in G\}$, והוכחתם בתרגיל הבית השני שזו חבורה אבלית אם $G$ אבלית. נזכיר כי האקספוננט של חבורה הוא המספר הטבעי $N$ הקטן ביותר כך ש-$a^N = e$ לכל $a \in G$, ומסמנים $\exp(G) = N$.
האם קיימת חבורה אבלית $G$ כך שמתקיימים כל התנאים הבאים: $|G| = 32$, $\exp(G) = 4$, $\left[G : G^2\right] = 4$?

**שאלה 3.**

1. מצאו את מחלקות הצמידות השונות בחבורה $S_6$. אין צורך לכתוב את האיברים בכל מחלקת צמידות.
2. מצאו את $\exp(S_3)$ ואת $\exp(S_5)$.

**שאלה 4.** מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 720 עד כדי איזומורפיזם. רמז: ידוע כי $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

**שאלה 5.** השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את $U_{14}$ כתת־חבורה של $S_6$.

**שאלה 6.** כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה. נזכיר כי שיכון הוא מונומורפיזם, ונאמר כי חבורה $A$ משוכנת בחבורה $B$ אם קיים שיכון $f : A \to B$.
נסמן $G = \bigcup_{n \geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה $S_n$ עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n \geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין $A_n$ עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את $S_n$ כתת־חבורה של $S_{n+1}$ לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה $\sigma$ של $n$ איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות $G$ ו-$H$.

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. (רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה

$$\phi_n : S_n \to A_{n+2}$$
$$\sigma(i) \mapsto \begin{cases} \sigma(i-2)+2 & 3 \le i \le n+2 \\ 1 & i=1 \wedge \text{sign}(\sigma)=1 \\ 2 & i=2 \wedge \text{sign}(\sigma)=1 \\ 2 & i=1 \wedge \text{sign}(\sigma)=-1 \\ 1 & i=2 \wedge \text{sign}(\sigma)=-1 \end{cases}$$

כלומר אם $3 \le i \le n+2$ אז $\phi_n(\sigma)(i) = \sigma(i-2)+2$; אם $\sigma$ היא תמורה זוגית, אז נשלח אותה "להזזה" שלה בשני מקומות בתוך $A_{n+2}$, ואם $\sigma$ תמורה אי־זוגית אז היא תשלח לאותה "הזזה" כפול החילוף $(1\,2)$. הראו מהבנייה כי תמונת $\phi_n$ מוכלת ב-$A_{n+2}$ ושהיא הומומורפיזם מוגדר היטב. אתגר: חשבו למה אי אפשר לשכן את $S_n$ בתוך $A_{n+1}$ עבור $n \ge 2$.)

2. הראו כי קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$. יש להראות כי השיכונים בסעיף הקודם תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \ge 5$ ולכל $\sigma \in S_n$.

3. הראו כי קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$.

4. הוכיחו כי החבורות $G$ ו-$H$ אינן איזומורפיות. רמז: אחת פשוטה והשנייה לא.

בהצלחה!