פתרון תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. כתבו את לוחות הכפל של U_5, U_8 ובדקו האם הן ציקליות.

פתרון.

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

לוח הכפל של U_5

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

לוח הכפל של U_8

בנוסף, החבורה U_5 היא ציקלית (נוצרת על ידי כל איבר שאינו איבר היחידה) ואילו U_8 לא ציקלית (כי הסדר של כל איבר קטן מ-4), ולכן אלו חבורות שונות, אפילו אם נשנה את שמות האיברים.

שאלה 2. ראינו בתרגיל הבית הקודם כי קבוצת המטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

היא תת־חבורה של $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. מצאו את הסדר של H ואת הסדר של איברי H. האם H ציקלית?

פתרון. עבור כל אחד מ-a, b, c יש לנו שתי אפשרויות בלתי תלויות לבחירה. לכן ישנם $2^3 = 8$

איברים בחבורה H. כלומר $|H| = 8$. היא לא ציקלית, כי היא לא אבלית. למשל

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

הסדר של האיברים הוא 1 עבור איבר היחידה (מטריצת הזהות), שני האיברים שבהם $a = b = 1$ הם מסדר 4 ושאר האיברים מסדר 2. מפני שאין איבר מסדר 8, זו עוד דרך להוכיח כי H אינה ציקלית.

שאלה 3. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי ב-G. הוכיחו כי $T \leq G$.

פתרון. נוכיח זאת לפי הקריטריון הפחות מקוצר, כלומר נוכיח:

א. $e \in T$.

ב. אם $g_1, g_2 \in T$, אזי $g_1 g_2 \in T$.

ג. אם $g \in T$, אזי $g^{-1} \in T$.

אכן,

א. $e \in T$, כי $o(e) = 1 < \infty$.

ב. נניח ש-$g_1, g_2 \in T$. נניח כי $m = o(g_1), n = o(g_2)$ עבור $n, m < \infty$. כיוון שהחבורה G אבלית,

$$(g_1 g_2)^{mn} = g_1^{mn} g_2^{mn} = (g_1^m)^n (g_2^n)^m = e^n e^m = e$$

הוכחנו שקיים $k = mn < \infty$ שעבורו $(g_1 g_2)^k = e$. לכן, $o(g_1 g_2) \leq k < \infty$, כלומר $g_1 g_2 \in T$.

ג. הוכחנו בתרגול ש-$o(g^{-1}) = o(g)$ לכל $g \in G$. בפרט, אם $g \in T$, אזי $o(g) < \infty$, ולכן גם $o(g^{-1}) = o(g) < \infty$.

בסך הכל, לפי הקריטריון המקוצר, $T \leq G$.

שאלה 4. תהי G חבורה ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש-H היא תת־חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.

פתרון.

א. צריך להראות שבמקרה זה סגירות לפעולה מבטיחה קיום יחידה וסגירות להופכי. לשם כך נראה שבחבורה סופית ההופכי של כל איבר הוא חזקה שלו. נניח $|G| = n$, אז כפי שידוע לנו $o(g) \leq n$ לכל $g \in G$. נסמן $o(g) = m$, אזי

$$\underbrace{(g * \cdots * g)}_{\text{פעמים } m} = \underbrace{(g * \cdots * g)}_{\text{פעמים } m-1} * g = e$$

ולכן g^{m-1} הוא ההופכי של g. כעת, אם $g \in H$, אז גם $g^k \in H$ לכל $k \in \mathbb{Z}$ בגלל הסגירות לפעולה. בפרט, $g^m = e \in H$ ולכן H מכילה את היחידה של G, וכן $g^{m-1} = g^{-1} \in H$ ולכן יש סגירות להופכי. בסך הכל קיבלנו כי H תת־חבורה של G.

הדרישה $H \neq \varnothing$ הכרחית, שכן אחרת H אינה חבורה (אפילו שמתקיימת סגירות לפעולה).

ב. יש הרבה אפשרויות כאן. החבורה האינסופית "הראשונה" שפגשנו תתאים. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = \mathbb{N} \cup \{0\}$ שבודאי אינה ריקה. אז H סגורה לפעולה (אם $a, b \geq 0$, אז גם $a + b \geq 0$) ומכילה אפילו את איבר היחידה 0, אבל אינה סגורה להופכי. לכן H אינה תת־חבורה.

שאלה 5. תהי G חבורה. תהיינה $H, K_1, K_2 \leq G$ תת־חבורות של G. הוכיחו כי אם $H \subseteq K_1 \cup K_2$, אז מתקיים $H \subseteq K_1$ או $H \subseteq K_2$.

פתרון. תהא $H \subseteq K_1 \cup K_2$. נניח בשלילה שקיימים $h_1 \in H \setminus K_2$ וגם $h_2 \in H \setminus K_1$. בפרט, זה אומר כי $h_1 \in K_1$ וגם $h_2 \in K_2$. עקב סגירות הפעולה בתת־חבורה H $h_1 h_2 \in H$, ולכן $h_1 h_2 \in K_1$ או $h_1 h_2 \in K_2$. אם מניחים $h_1 h_2 \in K_1$, אז מכיוון ש-$h_1 \in K_1$ גם $h_1^{-1} \in K_1$. לכן $h_1^{-1} \cdot h_1 h_2 = h_2 \in K_1$ וזו סתירה להנחה. באופן דומה מגיעים לסתירה במקרה בו $h_1 h_2 \in K_2$, ולכן $H \subseteq K_1$ או $H \subseteq K_2$.
משאלה זו נובע כי חבורה אינה איחוד של שתי תת־חבורות לא טריוויאליות שלה.

שאלה 6 (רשות). מצאו דוגמה לחבורה G ולתת־חבורות $H, K_1, K_2, K_3 \leq G$ כך שמתקיים

$$H \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

אבל H **אינה** מוכלת באף איחוד מן הצורה $K_i \cup K_j$ עבור $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

שאלה 7 (רשות). קבוצה I נקראת קבוצה מכוונת אם היא קבוצה סדורה חלקית (קיים סדר חלקי $<$ על I) כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$i, j < k$.
אוסף $\{G_i\}_{i \in I}$ של חבורות נקרא רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$. הוכיחו כי איחוד רשת עולה $\bigcup_{i \in I} G_i$ הוא חבורה. הסיקו (מיידי) שאם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.
לדוגמה, הוכחנו כי Ω_∞ היא חבורה כמקרה פרטי של שאלה זו, שבו $I = \mathbb{N}$ ושמתקיים $i < j$ אם $i | j$.

בהצלחה!