# פתרון בוחן בקורס מבנים אלגבריים
# 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

**מרצה:** ד"ר ארז שיינר

**מתרגלים:** תומר באואר ודניאל עומר

**הוראות:**

- יש לענות על כל השאלות.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (וגם אותו לא ממש צריך).

בהצלחה!

**שאלה 1.** (10 נק' לסעיף) בכל סעיף הקיפו את התשובה הנכונה לדעתכם והוסיפו נימוק קצר בהמשך. נימוק קצר לרוב יכלול רק שניים או שלושה משפטים.

א. כל חבורה מסדר $89214$ מכילה איבר מסדר $2$.

נכון          לא נכון

ב. אם $n$ ו-$m$ לא זרים, אז הסדר הגדול ביותר לאיבר ב-$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ הוא $\max(n,m)$.

נכון          לא נכון

ג. קיים אפימורפיזם (הטלה) $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

נכון          לא נכון

ד. קיים מונומורפיזם (שיכון) $f: \mathbb{Z}_{20} \to S_9$.

נכון          לא נכון

ה. קיימות שלוש חבורות $G_1, G_2, G_3$ מסדר $60$ ושהן לא איזומורפיות זו לזו בזוגות.

נכון          לא נכון

ו. מספר תת־החבורות מסדר $3$ של $S_3 \times S_3$ הוא

- $2$
- $3$
- $4$
- $12$

פתרון.

א. נכון. כל חבורה מסדר זוגי מכילה איבר מסדר $2$.

ב. לא נכון. למשל $4$ ו-$6$ אינם זרים כי $\gcd(6,4)=2$, אבל האיבר $(1,1)\in\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4$ הוא מסדר $12$.

ג. לא נכון. אילו היה קיים כזה אפימורפיזם, אז החבורות האלו היו איזומורפיות כי שתיהן מסדר סופי $27$. אבל בראשונה יש איברים מסדר $9$, כמו $(0,1)$, ובאחרת כל האיברים מסדר המחלק את $3$.

ד. נכון. החבורה $\mathbb{Z}_{20}$ ציקלית מסדר $20$, ולכן מספיק למצוא תת־חבורה ציקלית מסדר $20$ של $S_9$. ישנם איברים מסדר $20$ ב-$S_9$ כמו $\sigma=(1,2,3,4,5)(6,7,8,9)$. אז $f$ המוגדר לפי $f(i)=\sigma^i$ מתאים לשאלה.

ה. נכון. למשל $\mathbb{Z}_{60}$ לא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{30}$ כי הראשונה ציקלית והשנייה לא. שתיהן אבליות, ולכן לא איזומורפיות ל-$A_5$ שאינה אבלית.
ישנן אפשרויות נוספות, למשל גם $A_4\times\mathbb{Z}_5$ ו-$S_3\times\mathbb{Z}_{10}$ הן לא אבליות ולא איזומורפיות לאף אחת מהחבורות הקודמות, כי הסדר המרבי לאיבר ב-$A_5$ הוא $5$, ב-$A_4\times\mathbb{Z}_5$ הוא $15$ וב-$S_3\times\mathbb{Z}_{10}$ הוא $30$.
נעיר שהחבורה $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$ היא ציקלית, ולכן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_{60}$.

ו. יש $4$ תת־חבורות מסדר $3$ (בהכרח ציקליות) והן $\langle((1,2,3),\mathrm{id})\rangle$, $\langle(\mathrm{id},(1,2,3))\rangle$, $\langle((1,2,3),(1,2,3))\rangle$ ו-$\langle((1,2,3),(1,3,2))\rangle$. אפשר לשים לב שהן שונות כי הוכחנו שחיתוך של תת־חבורות מסדר ראשוני הוא טריוויאלי או שיש שיוויון.
דרך אחרת: אפשר לספור כמה איברים יש מסדר $3$ במכפלה הישרה ולחלק ב-$2$, שהוא מספר היוצרים של חבורה מסדר $3$. כלומר לחשב $(3\cdot3-1)/2=4$.
לא ייתכן שיש $12$ תת־חבורות מסדר $3$, כי זה גורר שיש $12\cdot(3-1)=24$ איברים מסדר $3$, אבל יש עוד $12$ איברים מסדר $6$ וגם את איבר היחידה, ונסיק שיש יותר איברים מסדר החבורה $|S_3\times S_3|=36$.

**שאלה 2.** תהי $G$ חבורה, ונסמן את אוסף הריבועים של איברים $G$ בסימון

$$D(G)=\left\{g^2\,\middle|\,g\in G\right\}$$

א. (20 נק') הוכיחו שאם $G$ אבלית, אז $D(G)$ היא חבורה ביחס לפעולה מ-$G$.

ב. (20 נק') הוכיחו שאם $G=S_5$, אז $D(G)=A_5$.
רמז: כיצד נראות תמורות ב-$A_5$ כמכפלת מחזורים זרים? כיצד מחשבים סימן?

ג. (בונוס, 10 נק') מצאו חבורה אינסופית $G$ כך ש-$D(G)=G$, וחבורה אינסופית $H$ כך ש-$D(H)=\{e_H\}$.

פתרון.

א. מספיק לבדוק כי $D(G)\leq G$. לפי הגדרה $D(G)\subseteq G$, כי $g^2\in G$ לכל $g\in G$ לפי סגירות לפעולה. בנוסף $D(G)\neq\varnothing$, כי $e=e^2\in D(G)$. אם $a,b\in D(G)$, אזי הם ריבועים $a=\alpha^2$ ו-$b=\beta^2$ של איברים כלשהם $\alpha,\beta\in G$. סגירות להופכי ב-$D(G)$ תתקיים כי

$$a^{-1}=(\alpha^2)^{-1}=(\alpha^{-1})^2\in D(G)$$

שהרי $\alpha^{-1}\in G$. באופן דומה, מפני ש-$\alpha\beta\in G$, נקבל כי

$$ab=\alpha^2\beta^2\overset{\star}{=}(\alpha\beta)^2\in D(G)$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ השתמשנו באבליות של $G$. בסך הכל $D(G)\leq G$, ולכן $D(G)$ חבורה.

ב. נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית. כל תמורה $\sigma\in D(S_5)$ היא ריבוע $\sigma=\tau^2$ של איזושהי תמורה $\tau\in S_5$. הסימן של תמורה הוא כפלי, ולכן

$$\operatorname{sign}(\sigma)=\operatorname{sign}(\tau^2)=\operatorname{sign}(\tau)^2=1$$

ולכן $\sigma\in A_5$. כלומר $D(S_5)\subseteq A_5$.
בכיוון השני, תהי $\sigma\in A_5$. ראינו כיצד נראית תמורה ב-$S_5$ כאשר מציגים אותה כמכפלת מחזורים זרים. מבין שבע האפשרויות למבנה המחזורים ב-$S_5$, בדיוק ארבע מהן מתאימות לתמורה זוגית. נראה שכל אפשרות כזו היא ריבוע של תמורה ב-$S_5$. הראשונה היא $\mathrm{id}=\mathrm{id}^2$, ולכן $\mathrm{id}\in D(S_5)$. השנייה היא מחזורים $(i_1\ i_2\ i_3)$ מאורך 3. כבר ראינו בכמה הזדמנויות כי

$$(i_1\ i_2\ i_3)=(i_1\ i_3\ i_2)^2\in D(S_5)$$

אפשרות נוספת היא של מחזור מאורך 5, וחישוב דומה יראה כי

$$(i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5)=(i_1\ i_4\ i_2\ i_5\ i_3)^2\in D(S_5)$$

האפשרות האחרונה היא מכפלה של שני חילופים זרים, ועבורה צריך לבדוק כי

$$(i\ j)(k\ l)=(i\ k\ j\ l)^2\in D(S_5)$$

ובסך הכל $D(S_5)\subseteq A_5$, כפי שרצינו.
טעות נפוצה: עבור חבורה לא אבלית $G$ תת־הקבוצה $D(G)$ היא לא תמיד תת־חבורה. לכן חשוב להוכיח בסעיף זה את ההכלה בשני הכיוונים. הסיבה היא

שמכפלה של שני ריבועים אינה בהכרח ריבוע בחבורה לא אבלית. למשל זה לא נכון עבור $S_6$. ברור, כמו בהוכחה לעיל, כי $D(S_6) \subseteq A_6$, אבל $D(S_6)$ מכילה 270 איברים ולא $360 = |A_6|$ (התמורות הזוגיות שאינן ריבועים הם ממבנה מחזורים $(4,2)$). בנוסף 270 לא מחלק את $|S_6| = 720$, ולכן $D(S_6)$ אינה יכולה להיות תת־חבורה לפי משפט לגרנאז'.

ג. אפשר לבחור את $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_3$ עם חיבור רכיב-רכיב, את $\mathbb{Q}$ או את $\mathbb{R}$ עם חיבור, את $\mathbb{R}^+$ או את $\Omega_\infty$ עם כפל, ועוד הרבה אחרות (המינוח לחבורה $G$ כזו הוא חבורה 2-חליקה אינסופית). למשל עבור כל $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a}{2b} \in D(\mathbb{Q})$, ולכן יש שיוויון $D(G) = G$.
עבור $H$ יש לבחור חבורה אינסופית ממעריך 2 כמו $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ או $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$. הסיבה היא שחייבים שלכל $x \in H$ יתקיים $x^2 = e_H$. זה גורר ש-$H$ אבלית, ואפילו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$.