

תרגיל 11 (לא להגשה)

שאלה 1

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקציית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

1. $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$ בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2. $f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$ ב \mathbb{R}

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ בקטע $(-1, 1)$

4. $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0, \infty)$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

1. אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I ו $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)$ בקטע I אז $f_n(x) + g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x) + g(x)$ בקטע I

2. אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I אז $g(x)f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)f(x)$ בקטע I

3. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $S(x)$ בקטע I אז הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל 0 בקטע I .

4. אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I וכל אחת מהפונקציות $f_n(x)$ היא רציפה במ"ש ב I אז גם $f(x)$ רציפה במ"ש ב I .

שאלה 3

תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ל $f(x)$ בקטע $[a, b]$ אך אינה מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע זה. הוכיחו כי היא לא מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע (a, b) . רמז: השתמשו במבחן ה $\lim\text{-sup}$.

שאלה 4

החליטו אם הטורים הבאים מתכנסים, מתכנסים במ"ש או מתבדרים בתחום הנתון

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ בתחום $(-a, a)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$ בתחום $[0, \infty)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ בתחום $[0, \infty)$ (רמז: טור הנדסי)

שאלה 5

מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

בקטע $(-1, 1)$.

שימו לב: הטור אינו מתכנס במ"ש $(-1, 1)$, אך ניתן לעקוף בעיה זו.

שאלה 6

מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$$