תרגיל 2 - אינפי 3 תש"פ

הערה. לתלמידים שלא ראו את המונח "מטריקה" בהרצאה מותר להניח, שבכל מקום שמופיע "מרחב מטרי (X,d)", X היא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$ ו $d(x,y)=\|x-y\|$.

תזכורת: הזוג (X,d) נקרא מרחב מטרי, או באופן שקול d היא מטריקה על הקבוצה X, אם d היא פונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1. $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x\neq y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in X$.
3. לכל $x,y,z\in X$ מתקיים אי-שוויון המשולש: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$, אזי הנורמה $\|\cdot\|$ מגדירה מטריקה d על X על ידי

$$d(x,y)=\|\cdot\|.$$

תרגיל 1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\emptyset\neq A\subseteq X$. הראו, ש A היא קבוצה פתוחה אם ורק אם קיים אוסף של כדורים פתוחים $\{B(x_i,r_i)\}$ כך שמתקיים:

$$\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i)=A.$$

פתרון. נשים לב, שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה, כיוון שאם $x\in B(a,r)$, אזי אם נסמן $r'=r-d(a,r)$, לכל $y\in B(x,r')$ מתקיים:

$$\begin{aligned} d(y,a) &\leq d(y,x)+d(x,a)\\ &< r'+d(x,a)\\ &= r-d(x,a)+d(x,a)=r \end{aligned}$$

ולכן גם $y\in B(a,r)$. הראנו, שלכל $x\in B(a,r)$ קיים r' כך ש $B(x,r')\subseteq B(a,r)$ ולכן $B(a,r)$ פתוחה על פי ההגדרה. $B(x_i,r_i)$ פתוחה ולכן

$$\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i)$$

פתוחה כאיחוד של קבוצות סגורות.

תרגיל 2. הראו שאם $S\subseteq\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה מלרע, אזי $\inf S\in S$ ישירות מההגדרה של קבוצה סגורה. (כלמר בלי להשתמש בתנאי על נקודות הצטברות).

פתרון. נניח בשלילה שלא. אזי $\inf S\in\mathbb{R}\setminus S$. אבל על פי הגדרה של $\inf S$, לכל $0<\varepsilon$, קיים $x\in S$ כך ש $\inf S<x<\inf S+\varepsilon$. זאת אומרת, לכל ε,

$$B\left(\inf S,\varepsilon\right)\nsubseteq\mathbb{R}\setminus S.$$

לכן, $\mathbb{R}\setminus S$ אינה פתוחה ולכן S אינה סגורה, בסתריה להנחה.

תרגיל 3. יהי (X,d) יהי $x_1,\dots,x_n\in X$. הראו ש $X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ היא קבוצה פתוחה.
יהי $x\in X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$. נסמן:

$$r=\min_{1\le i\le n}\left\{d\left(x,x_i\right)\right\}.$$

ברור שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $d\left(x,x_i\right)\ge r$ ולכן $x_i\notin B\left(x,r\right)$ לכל i . קיבלנו, $B\left(x,r\right)\subseteq X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ ולכן $X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ פתוחה על פי ההגדרה של קבוצה פתוחה.

תרגיל 4. האם $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ היא קבוצה פתוחה או סגורה? מה לגבי $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$?

פתרון. הקבוצה $\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה סגורה, כיוון ש 0 היא נקודה הצטברות שלה ואינה בקבוצה. מצד שני $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה פתוחה מכיוון שלכל נקודה בקבוצה, כל כדור פתוח סביבה מכיל $\aleph$ נקודות לא בקבוצה. באותו אופן, $\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ אינה פתוחה. יחד עם זאת, היא סגורה, מפני שהיא מכילה נקודת הצטברות בודדת, 0 והיא איבר של הקבוצה.

תרגיל 5. מצאו את כל הנקודות הפנימיות של $\mathbb{Z}$.

פתרון. ל $\mathbb{Z}$ אין נקודה פנמיות, כיוון שהעוצמה שלה היא $\aleph_0$ ועוצמה של כל כדור היא $\aleph$ ולכן לא קיים כדור שמוכל ב $\mathbb{Z}$, בפרט לא קיים כדור פתוח סביבה נקודה פנימית ב $\mathbb{Z}$ שמוכל ב $\mathbb{Z}$ ולכן אף נקדוה היא לא נקודה פנימית.

תרגיל 6. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן פתוחות ב $\mathbb{R}^2$.

1. עבור $v\in\mathbb{R}^2$ ו U פתוחה, הראו ש $v+U=\{v+u|u\in U,v\in V\}$.

פתרון. תהי U פתוחה ויהי $x\in v+U$. אזי, קיים $u\in U$ כך ש $x=v+u$. כיוון ש U פתוחה, קיים r, כך ש $B\left(u,r\right)\subseteq U$. מצד שני, קל לראות, ש $B\left(x,r\right)=B\left(u+v,r\right)=B\left(u,r\right)+v$ וכיוון ש $B\left(u,r\right)\subseteq U$, $B\left(u,r\right)+v\subseteq U+v$. לצורך המחשה נראה רק ש $B\left(u,r\right)+v=B\left(u+v,r\right)$.

$$\begin{aligned}B\left(u,r\right)+v&=\left\{w\in\mathbb{R}^2\middle|\,\|w-u\|<r\right\}+v\\&=\left\{w+v\middle|\,\|w-u\|<r\right\}\\&=\left\{w+v\middle|\,\|(w+v)-(u+v)\|<r\right\}\\&=\left\{t\middle|\,\|t-(u+v)\|<r\right\}=B\left(u+v,r\right)\end{aligned}$$

.2

$$U+V=\{u+v|u\in U,v\in V\}$$

כאשר $u\in U$ ו $v\in V$ הן פתוחות.

פתרון. נשים לב, שמתקיים:

$$\begin{aligned}U+V&=\left\{u+v\middle|u\in U,v\in V\right\}\\&=\bigcup_{v\in V}\left\{u+v\middle|u\in U\right\}\\&=\bigcup_{v\in V}(v+U)\end{aligned}$$

מהסעיף הקודם, כל קבוצה כזאת היא פתוחה ולכן גם האיחוד הוא קבוצה פתוחה.

3. U היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$, אזי

$$\alpha U=\{\alpha u|u\in U\}$$

היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. זאת הפרכה. אם ניקח $\alpha=0$, $\alpha U=\{(0,0)\}$ שהיא קבוצה סגורה.

4. הראו שהקבוצה $\left\{(x,y)\,\middle|ax+by>0\right\}$ היא קבוצה פתוחה.

פתרון. נראה שהמשלים הוא קבוצה סגורה. הקבוצה המשלימה של הקבוצה המבוקשת היא למעשה $\left\{(x,y)\middle|ax+by\leq 0\right\}=S$. נראה שלכל סדרה (a_n,b_n) ב S שמתכנסת, $\lim_{n\to\infty}(a_n,b_n)\in S$. תהי (a_n,b_n) סדרה מתכסת ב S ל (a,b). כיוון שכל סדרה ב $\mathbb{R}^2$ מתכנסת אם ורק היא מתכנסת רכיב-רכיב, מתקיים:

$$.\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$$

אזי $\lim_{n\to\infty}a_n+b_n=a+b$ וכיוון שלכל n, $a_n+b_n\leq 0$, גם $a+b\leq 0$ ולכן $(a,b)\in S$ ולכן S סגורה, ולכן

$$S^c=\{(x,y)\,|ax+by>0\}$$

פתוחה לפי ההגדרה, כנדרש.

5. יהיו $v,u\in\mathbb{R}^2$ בת"ל ויהיו $(a,b)\,,(c,d)\subseteq\mathbb{R}$ קטעים פתוחים. הראו, שהקבוצה

$$(a,b)\,v+(c,d)\,u=\{tv+su|a<t<b,c<s<d\}$$

היא פתוחה.

פתרון. תחילה, נסמן $v=(v_1,v_2)$ ו $u=(u_1,u_2)$,

$$X=(a,b)\,v+(c,d)\,u$$

נראה שהמשלים של X, Y היא קבוצה סגורה. על מנת להוכיח זאת, נשים לש, ש

$$Y = \{tv + su | t \leq a \vee b \leq t \vee s \leq c \vee d \leq c\}$$

שהיא איחוד של 4 קבוצות

$$\begin{aligned} X^c = &\{tv + su | t \leq a\} \cup \{tv + su | t \geq b\} \\ &\cup \{tv + su | s \leq c\} \cup \{tv + su | s \geq d\} \end{aligned}$$

נראה, שכל אחת מהקבוצות הללו היא קבוצה סגורה ו Y סגורה כאיחוד סופי של סגורות. נראה עבור

$$Y_{t \leq a} = \{tv + su | t \leq a\}.$$

עבור שאר הקבוצות, ההוכחה סימטרית. נשים לב לכל $t \in \mathbb{R}$ אפשר לתאר את הקבוצה

$$Y_t = \left\{tv + su \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$$

על ידי

$$\{(x, y) \mid (x, y) - tv = su, u \in \mathbb{R}\} = \left\{(x, y) \middle| (x, y) - tv \in \operatorname{span}\{u\}\right\}.$$

נשים לב, ש

$$\operatorname{span}\{u\} = \{(x, y) | u_2 x - u_1 y = 0\}.$$

ולכן

$$\begin{aligned} \{(x, y) \mid (x, y) - tv = su, u \in \mathbb{R}\} &= \\ \left\{(x, y) \middle| (x, y) - tv \in \operatorname{span}\{u\}\right\} &= \\ \left\{(x, y) \middle| u_2 (x - tv_1) - u_1 (y - tv_2) = 0\right\} & \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\left\{tv + su \middle| s \in \mathbb{R}\right\} = \{u_2 x - u_1 y = t (u_2 v_1 - u_1 v_2)\}.$$

בנוסף, $u_2 v_1 - u_1 v_2 \neq 0$ מכיוון ש u ו v הם וקטורים בת"ל. נניח, בלי הגבלת כלליות ש $u_2 v_1 - u_1 v_2 > 0$ ונקבל

$$\begin{aligned} Y_{t \leq a} &= \left\{u_2 x - u_1 y = t (u_2 v_1 - u_1 v_2) \middle| t \leq a\right\} \\ &= \left\{u_2 x - u_1 y < a (u_2 v_1 - u_1 v_2) \middle| \right\}. \end{aligned}$$

מכאן ההכוחה פשוטה - ניקח סדרה (x_n, y_n) ב $Y_{t \leq a}$. נראה שאם היא מתכנסת ל

(x,y) אזי $(x,y)\in Y_{t\le a}$. זהו מהלך שחוזר על עצמו:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y).$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}u_2x_n-u_1y_n=u_2x-u_1y$$
$$\Downarrow$$
$$u_2x_n-u_1y_n\le a\left(u_2v_1-u_1v_2\right)$$
$$u_2x-u_1y=\lim_{n\to\infty}u_2x_n-u_1y_n\le a\left(u_2v_1-u_1v_2\right)$$
$$\Downarrow$$
$$(x,y)\in Y_{t\le a}$$

הערה. החישובים נראים מסורבלים מעט וייתכן שיש דרך קלה יותר. אינטואיטיבית, ברור שהתחום המתואר הוא מקבילית שחסומה בין 4 ישרים. (בלי השפה). צריך להראות שהיא קבוצה פתוחה. על מנת לעשות את זה אנו מראים שלמעשה שקבוצה שנצאת מעל הישר (יחד עם הישר) היא קבוצה סגורה. החישובים נועדו רק למצוא תיאור אלגברי לקבוצה שנמצאת מעל או מתחת לישר. בנוסף, הטיעון "התחום הוא מקבילית ובכל מקבילית אפשר למצוא עיגול מספיק קטן שמוכל במקבילית" הוא טיעון קביל.

6. אם $A\in M_2(\mathbb{R})$ היא מטריצה הפיכה ו U היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$, אזי

$$AU=\{Au|u\in U\}$$

היא קבוצה פתוחה. (הדרכה: ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מהסעיף הקודם).

פתרון. הפונקציה $f(v)=Av$ היא פונקציה הפיכה (ז"א חח"ע ועל) מ $\mathbb{R}^2$ ל $\mathbb{R}^2$. ולכן מתקיים השווין

$$\mathbb{R}^2=A(U)\cup A(U^c).$$

בגלל ההפיכות מתקיים $A(U)\cap A(U^c)=\emptyset$ ולכן $A(U^c)=A(U)^c$. שוב, נראה ש $A(U)^c$ היא קבוצה סגורה.

נסמן $B=A^{-1}$,

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

()שוב, נראה שאם (x_n,y_n) היא סדרה ב $A(U)^c$ שמתכנסת ל (x,y), אז $(x,y)\in A(U)^c$. תהי (x_n,y_n) סדרה ב $A(U)^c$. כמו שאמרנו,

$$A(U^c)=A(U)^c$$

ולכן אם $(x_n,y_n)\in A(U^c)$, אזי

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in U^c$$

מתכנסת מפני שהיא מתכנסת בל רכיב. אבל U^c סגורה ולכן

$$\lim_{n\to\infty} A^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U^c \ .$$

אבל $A\left(A^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \in A\left(U^c\right) = A\left(U\right)^c$= (x_n, y_n) ולכן $A\left(U\right)^c$ סגורה.
לכן, $A(U)$ פתוחה.

הערה. בנוסף לנורמה הסטנדרטית, ניתן להשתמש גם בנורמות 1 ו ∞ על מנת להוכיח שקבוצה מסויימת פתוחה ואז להשתמש בשקילות שלהן עם הנורמה הסטנדרטית (יש הוכחה במערך תרגול, שנורמות שקולות מגדירות אותן קבוצות פתוחות). בנוסף, מותר להשתמש באפיון של קבוצות סגורות על ידי נק' הצטברות, שראיתם בהרצאה ונראה בתרגול הבא.

הפתרונות לבונוס יועלה בהמשך.

תרגיל 7. (בונוס). נשים לב, שלכל $x \in [0,1]$ קיים טור ממשי כך

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = x$$

ו $a_i \in \{0,1,2\}$.

1. הוכיחו, שהטענה נכונה.
2. הראו שאם הטור $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$ ו $a_n = 1$ אזי

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} .$$

3. נסמן על ידי $\mathcal{C}$ את האוסף הבא:

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0,1] \,|\, \exists \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \wedge \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0,2\} \right\},$$

כלמר קיים פיתוח שעבורו לכל i, $a_i = 0$. שימו לב, ש $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$, מפני שקיים פיתוח

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i} .$$

וכל המקדמים בפיתוח הזה הם 0 או 2. הראו, ש $\mathcal{C}$ היא קבוצה סגורה. (הדרכה: הראו, שכל נק' במשלים מכילה קטע פתוח סביבה שלא נמצא בקבוצה. כמו כן, מומלץ להתשמש בתכונות של טורים גאומטריים, על מנת לקבל את החסמים הרצויים).

תרגיל 8. (בונוס). הערה: אפשר להניח שהנורמה עובדים איתה היא הנורמה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$, כלמר

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

עבור $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נאמר ש Aחסומה, אם קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $v\in A$, $\|v\|\le c$.
נאמר ש $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה, אם לכל $v,u\in A$ מתקיים $tv+(1-t)\,u\in A$ לכל $0\le t\le 1$.
נאמר ש $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סימטרית ביחס ל 0, אם לכל $v\in A$, מתקיים $-v\in A$.
הראו, שאם A היא קבוצה פתוחה, קמורה, חסומה וסימטרית ביחס ל 0, אזי הפונקציה

$$\|v\|_A=\inf\left\{k>0\middle|\,\frac{x}{k}\in A\right\}$$

מגדירה נורמה של $\mathbb{R}^n$ ומתקיים $A=B\,(0,1)$ ביחס ל $\|\cdot\|_A$. (כלמר, A היא כדור יחידה הפתוח ביחס לנורמה החדשה שהדגרנו).