תרגיל 3

1. יהא $n \geq 2$ טבעי, ויהא P אוסף שורשי היחידה מסדר n.

א. הוכיחו שקיים $z \in P$ (כלומר קיים שורש יחידה) כך ש- $P = \{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$

ב. הראו שסכום איברי P הוא אפס. (רמז: סדרה הנדסית)

[תזכורת: $z \in \mathbb{C}$ הוא שורש יחידה מסדר n אם $z^n = 1$]

2. פתרו את המשוואה: $z^4 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 0$

3. הוכיחו את הזהות: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$ (בשימוש משפט דה-מואבר).

4. פתור מעל $\mathbb{C}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ -i & 1 & 0 & 2 \\ 1+i & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

5. מצאו את הצורה הקנונית של המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

6. נתונה מערכת משוואות מעל שדה הממשיים.

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 = a+3 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a-3)x_3 = 7 \end{cases}.$$

א. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו ערכים של a אין פתרון למערכת?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות? במקרה זה מצא גם את הפתרון הכללי.

7. נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית של m משוואות ו n נעלמים.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שאם $c = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת, אזי לכל סקלר λ גם λc הוא פתרון.

ב. הוכיחו כי אם $c = (\gamma_1, ..., \gamma_n), d = (\delta_1, ..., \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת, אזי גם $c + d$ הוא פתרון של המערכת.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים כי אם $c = (\gamma_1, ..., \gamma_n), d = (\delta_1, ..., \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת ו λ_1, λ_2 הם סקלרים כלשהם, אזי גם $\lambda_1 c + \lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. הוכיחו או הפריכו: תכונות א,ב,ג מתקיימות גם עבור מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית.

.8 הוכח שבכל אחד מהמקרים הבאים, אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $(B+C)A = BA + CA$.

ב. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (כאשר $\alpha \in F$).

ג. $A0 = 0$ וכן $0A = 0$.

.9 חשב את המכפלות הבאות או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

.10

א. הכפילו את המטריצות הבאות בשני הסדרים EF ו FE:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

האם $EF = FE$?

ב. עבור A,B הבאים, חישבו את A^2, A^3, B^2, B^3 והעריכו מה תהיה התוצאה ל A^5, A^n, B^5, B^n:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$