תרגיל תיאורטי מספר 2

1. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f,g\in V:\ \langle f,g\rangle=\sum_{i=0}^{2}f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x)=x, g(x)=x^2+4x-3$ חשבו את $\langle f,g\rangle$.
פתרון : לפי הגדרה

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{3}f(i)g(i)=0^2\cdot\left(0^2+4\cdot0-3\right)+1^2\cdot\left(1^2+4\cdot1-3\right)+2^2\cdot\left(2^2+4\cdot2-3\right)=2+36=38$$

(ב) מצאו בסיס או"ג ל V.
פתרון : נפעיל גרם שמידט על $B=\left\{1,x,x^2\right\}$ בסיס של V:

$$\begin{aligned}w_1&=1\\w_2&=x-\frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}1=x-\frac{3}{3}=x-1\\w_3&=x^2-\frac{\left\langle x^2,x-1\right\rangle}{\|x-1\|^2}(x-1)-\frac{\left\langle x^2,1\right\rangle}{\|1\|^2}1=\\&=x^2-\frac{4}{2}(x-1)-\frac{5}{3}=x^2-2x+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. יהא $(V,\langle *,*\rangle)$ ממ"פ. נגדיר $S=\{u\in V:\ \|u\|=1\}$ (כאשר $\|u\|$ זה הנורמה המושרית). יהא $0\neq v\in V$. הוכיחו כי $\min\{\|v-u\|:\ u\in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v (כלומר עבור $\tilde{u}=\frac{v}{\|v\|}$).
פתרון : מחישוב ישיר נקבל

$$\|v-\frac{v}{\|v\|}\|^2=\|v\left(1-\frac{1}{\|v\|}\right)\|^2=\left|\left(1-\frac{1}{\|v\|}\right)\right|^2\|v\|^2=|(\|v\|-1)|^2=(\|v\|-1)^2=\left(\|v\|^2-2\|v\|+1\right)$$

ולכל $u\in S$ מתקיים כי כי

$$\|v-u\|^2=\langle v-u,v-u\rangle=\|v\|^2+-\langle v,u\rangle-\langle u,v\rangle+\|u\|^2=\|v\|^2+-2Re(\langle v,u\rangle)+1$$

ולכן בשביל להשלים את הטענה מספיק להראות כי $\|v\|^2-2\|v\|+1\leq\|v\|^2+-2Re(\langle v,u\rangle)+1$ או באופן שקול להראות כי $2Re(\langle v,u\rangle)\leq 2\|v\|$. אכן, מתקיים כי $Re(\langle v,u\rangle)\leq|\langle v,u\rangle|$ ולכן לפי אי שיוויון קושי שוורץ נקבל כי

$$Re(\langle v,u\rangle)\leq|\langle v,u\rangle|\leq\|v\|\|u\|=\|v\|$$

כנדרש.

3. יהא V ממ"פ. ויהא $\{0\}\neq W\leq V$ תת מרחב. (בשאלה זאת, מומלץ להיעזר בהטלות).

(א) הוכיחו כי כל $v\in V$ ניתן להצגה כ $v=w+w'$ כאשר $w\in W$ ו $w'\in W^{\perp}$.

פתרון : נשים לב שמתקיים $v=\pi_W(v)+v-\pi_W(v)$. נגדיר $w=\pi_W(v)\in W$ ו $w'=v-\pi_W(v)\in W^{\perp}$ לפי הגדרת הטלה.

(ב) הוכיחו כי הצגה זאת יחידה. כלומר אם $v=w_1+w_1'$ כאשר $w_1\in W$ ו $w_1'\in W^{\perp}$ וגם $v=w_2+w_2'$ כאשר $w_2\in W$ ו $w_2'\in W^{\perp}$ אזי $w_1=w_2,\ w_1'=w_2'$.

פתרון : אם $v=w_1+w_1'$ וגם $v=w_2+w_2'$ נקבל כי $w_1+w_1'=w_2+w_2'$ ולכן

$$w_1-w_2=w_2'-w_1'$$

אבל $w_1-w_2\in W$ כי הוא תת מרחב ואילו $w_2'-w_1'\in W^{\perp}$ כי הוא תת מרחב . אבל הם שווים ולכן $w_1-w_2=w_2'-w_1'=0$ כי $W\cap W^{\perp}=\{0\}$. נעביר אגף ונקבל את המבוקש.

(ג) הוכיחו כי $W\subseteq\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$.

פתרון : יהא $w\in W$ צ"ל $w\in\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. כלומר יהא $v\in W^{\perp}$ צ"ל $\langle w,v\rangle=0$ וזה אכן מתקיים כי $\langle w,v\rangle=\overline{\langle v,w\rangle}=\bar{0}=0$

(ד) הוכיחו כי $W=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ (היעזרו בסעיפים קודמים)

פתרון :נראה את ההכלה בכיוון השני: יהא $v\in\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ צ"ל $v\in W$. נציג את $v=w+w'$ כאשר $w\in W$ ו $w'\in W^{\perp}$ ונרצה להוכיח כי $w'=0$ (ואז $v=w\in W$).

אכן, כיוון ש $v\in\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ נקבל כי $\langle v,w'\rangle=0$ לפי הגדרה. ואז

$$0=\langle v,w'\rangle=\langle w+w',w'\rangle=\langle w,w'\rangle+\langle w',w'\rangle=0+\|w'\|^2$$

כלומר קיבלנו כי $\|w'\|^2=0$ מה שגורר כי $w'=0$ כנדרש.

4. יהא V ממ"פ, ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ל V. הוכיחו כי אם לכל $v\in V$ מתקיים

$$[\forall i\in\{1,\ldots n\}\ \langle v,v_i\rangle=0]\Rightarrow[v=0]$$

פתרון יהא $v\in V$ אזי קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ כך ש $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$ כי B בסיס. לכן אם $[\forall i\in\{1,\ldots n\}\ \langle v,v_i\rangle=0]$ נקבל כי

$$\langle v,v\rangle=\left\langle v,\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i\langle v,v_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i0=0$$

ולכן $\|v\|^2=0$ מה שגורר כי $v=0$ כנדרש.

5. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא

אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned}4x_1+2x_2+3x_3&=7\\2x_1+3x_2+3x_3&=4\\4x_1+4x_2+5x_3&=8\\2x_1+5x_2+5x_3&=6\end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה $b'=\begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\\b'_4\end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned}4c_1+2c_2+3c_3&=b'_1\\2c_1+3c_2+3c_3&=b'_2\\4c_1+4c_2+5c_3&=b'_3\\2c_1+5c_2+5c_3&=b'_4\end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b-b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$). מצאו גם אתם את c_1, c_2, c_3.

[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואת $Ax=b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax=b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

פתרון: נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\2&3&3\\4&4&5\\2&5&5\end{pmatrix}$$

ונרצה לפתור את המערכת $Ax=b$ עבור $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\2&3&3&4\\4&4&5&8\\2&5&5&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&2&2&1\\0&4&3.5&2.5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0.5&1.5\end{array}\right)$$

רואים כי אכן אין פתרון למערכת ועמודות A בת"ל. נשים לב כי $C(A)=\left\{Ax : x\in\mathbb{R}^4\right\}$ והשאלה מבקשת למצוא $b'\in C(A)$ כך ש $\|b-b'\|=\min\left\{\|b-b"\| : b"\in C(A)\right\}$ שזה בדיוק התכונה של ההטלה $\pi_{C(A)}(b)$ ולכן לאחר שנמצא את b' נפתור את המערכת $Ax=b'$ והפתרון שלה יהיה $c=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$ המבוקש.

נמצא בסיס או"ג ל $C(A)$ ע"י גרם שמידט

נסמן $v_3=\begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}$ ונפעיל גרם שמידט.

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1\\
w_2 &= v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\frac{40}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\\
w_3 &= v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2=\begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}-\frac{48}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{12}{14}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}-\frac{6}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{6}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר $\{w_1=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}\}$ בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$.

כעת נטיל את $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$ על $C(A)$ באמצעות הבסיס הזה שהוא או"ג. לפי התיאוריה

$$b'=\pi_{C(A)}(b)=\sum_{i=1}^{3}\pi_{w_i}(b)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\langle b,w_i\rangle}{\|w_i\|^2}w_i$$

נחשב

$$\frac{\langle b,w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1=\frac{80}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix},\ \frac{\langle b,w_2\rangle}{||w_2||^2}w_2=\frac{8}{14}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\ \frac{\langle b,w_3\rangle}{||w_3||^2}w_3=\frac{1/7}{4/35}\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}$$

ונקבל בסופו של דבר

$$b^{'}=2\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-3\\-9\\7/5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}27\\17\\33\\23\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת $Ax=b'$ ונקבל שהפתרון הוא

$$c=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\5/4\end{pmatrix}$$