

פיסיקה למתמטיקאים 88-320 מבחן מועד ב' סמסטר ב' תשע"א

משך המבחן: שעתיים וחצי. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5). סמנו
בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. גוף נקודתי בעל מסה m נע חפשית בשלושה ממדים בפוטנציאל $U = x \sin z + y \cos z$

(א) הראו כי הלגרנז'יאן אינווריאנטי תחת הטרנספורציה

$$x \mapsto x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$y \mapsto y \cos \phi - x \sin \phi$$

$$z \mapsto z + \phi$$

(ב) מצאו את הטרנספורמציה האינפיניטסימלית המתאימה.

(ג) מצאו את הגודל הנשמר לפי משפט נתר.

2. גוף בעל מסה m נע בשני ממדים בפוטנציאל $U = \frac{k(x^2+y^2)}{2}$

(א) כתבו את משוואות התנועה.

(ב) פתרו את משוואות התנועה עבור תנאי ההתחלה $x(0) = x_0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0, \dot{x}(0) = 0$

(ג) עבור הפתרון בסעיף הקודם מצאו את $y(x)$. מהי צורת המסלול?

(ד) כתבו את הלגרנז'יאן בקואורדינטות פולריות (r, θ) . מהי הקואורדינטה הציקלית
ומהו הגודל הנשמר?

3. (א) נתונה פונקציה גל חד מימדית המתאימה למצב היסוד של בור פוטנציאל

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{אינסופי. חשבו את } \langle x \rangle, \Delta x, \langle p \rangle, \Delta p$$

(ב) הוכיחו את משפט ארנפסט (Ehrenfest)

$$x^2 \frac{d\langle A \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle,$$

כאשר H ההמילטוניאן ו A אופרטור כלשהוא. (רמז : משוואת שרדינגר התלויה בזמן $i\hbar \partial|\psi\rangle/\partial t = H|\psi\rangle$.)

4. נתון האופרטור הבא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים הנמדדים האפשריים עבור אופרטור זה?

(ב) מהם הוקטורים העצמיים (המנורמלים) של האופרטור?

(ג) חלקיק נמצא במצב

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מהי ההסתברות לקבל את הערך 6 במדידת הגודל הפיסקלי הקשור ל- A ?

(ד) נתון שעבור אופרטור מסויים B מתקיים $[B, A] = 0$. האם ייתכן כי הווקטור

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של B ? תנו דוגמה ל- B או הוכיחו אי התכנות.

5. (בונוס - לא חובה) בזמן $T = 0$ חללית מתחילה להתרחק מכדור"א במהירות $\beta = 0.6$ ממהירות האור. בזמן $T = 1$ לפי שעון כדור הארץ מגלים בכדור הארץ כי אחד האסטרונוטים נשכח ושולחים אותו במעבורת מהירה אל החללית. המעבורת מגיעה אל החללית בזמן $T = 2$ לפי שעון החללית. מהי מהירות המעבורת יחסית לחללית?

נוסחאות שימושיות

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\int x^2 \cos x dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$$

בהצלחה