פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1

חשב את האינטגרלים המסוימים הבאים:

א. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1-\cos x}\,dx$.

ב. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$.

ג. $\int_{0}^{\pi} \left|\sin x - \cos x\right| dx$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נציב $t = 1-\cos x \quad dt = \sin x\,dx$.

עבור $x = \frac{3\pi}{2}$ נקבל $t = 1-\cos\frac{3\pi}{2} = 1$.

עבור $x = -\frac{\pi}{2}$ נקבל $t = 1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1-\cos x}\,dx = \int_{1}^{1} \sqrt{t}\,dt = 0 \ .$$

סעיף ב

נפתור תחילה בעזרת אינטגרציה בחלקים את $\int \arcsin x\,dx$.

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v' = 1$$

$$v = x$$

$$u = \arcsin x$$

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ .$$

נחשב את האינטגרל $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ בשיטת ההצבה.

נציב $t = 1-x^2 \quad dt = -2x\,dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2} \ .$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx = \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right] - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0.1278$$

סעיף ג

נבדוק את החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = \sin x - \cos x$.

נבדוק מתי הפונקציה מתאפסת.

$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ובתחום $[0,\pi]$

נקבל $x=\frac{\pi}{4}$. מכיוון שהפונקציה $f(x)=\sin x-\cos x$ רציפה, $x=\frac{\pi}{4}$ נקודת חיתוך יחידה עם ציר x, $f(0)<0$ ו $f(\pi)>0$ נקבל שהפונקציה חיובית בקטע $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ ושלילית בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)+(-\cos\pi-\sin\pi)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

<u>שאלה 2</u>

הוכח כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

נמצא את המקסימום המוחלק והמינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)=x^2-x$.

$f'(x)=2x-1$ והנגזרת מתאפסת רק עבור $x=\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\ f(0)=0,\ f(2)=2$.

מכיוון שהפונקציה $f(x)=x^2-x$ רציפה בקטע הסגור $[0,2]$ היא מקבלת בקטע את ערכה המקסימאלי והמינימאלי.

הערך המקסימאלי הוא 2 והמינימאלי $-\frac{1}{4}$. מכיוון שהפונקציה $g(x)=e^x$ היא פונקציה עולה נקבל ש

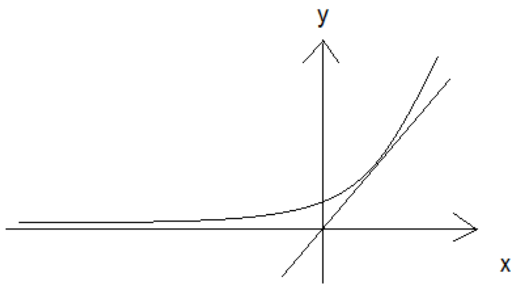
$e^{-\frac{1}{4}}\le e^{x^2-x}\le e^2$ לכל x בקטע.

סה"כ נקבל $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}=\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$.

<u>שאלה 3</u>

ישר $y=ax$ משיק לפונקציה $y=e^x$. מצא את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה y.

<u>פתרון שאלה 3</u>



נמצא תחילה את משוואת המשיק. בנקודת ההשקה נקבל ש $e^x=ax$ ושיפוע המשיק הוא a ז"א $e^x=a$. משתי המשוואות הנ"ל נקבל ש $ax=a \Leftarrow x=1 \Leftarrow a=e$.

השטח המבוקש הוא $\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{ex^2}{2}\right]_0^1=\left(e-\frac{e}{2}\right)-(1-0)=\frac{e}{2}-1$.

<u>שאלה 4</u>

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^4+2x^2$ $\quad g(x)=28-x^2$.

ב. $g(x)=e^{2x}$ $\quad h(x)=4e^x$ $\quad f(x)=e^{3x}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

נמצא תחילה את נקודות החיתוך של הגרפים.

$$x^4+2x^2=28-x^2$$

$$x^4+3x^2-28=0$$

$$(x^2+7)(x^2-4)=0$$

הפונקציות נחתכות כאשר $x_1=2, x_2=-2$.

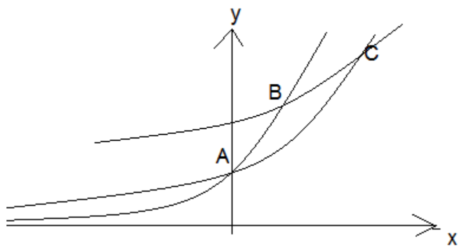
נשים לב ש $g(0)>f(0)$. מכיוון שהפונקציות רציפות נקבל שלכל $-2<x<2$ מתקיים $g(x)>f(x)$.

$$\int_{-2}^{2}(g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{2}((28-x^2)-(x^4+2x^2))dx=\int_{-2}^{2}(-x^4-3x^2+28)dx=\left[\frac{-x^5}{5}-x^3+28x\right]_{-2}^{2}=$$

$$\left(\frac{-2^5}{5}-2^3+28\cdot 2\right)-\left(\frac{-(-2)^5}{5}-(-2)^3+28\cdot(-2)\right)=83.2$$

<u>סעיף ב</u>

נשרטט את הפונקציות באותה מערכת צירים



נמצא את שיעורי ה x של הנקודות A,B,C .

נקודה A : הפונקציות $f(x),g(x)$ נחתכות על ציר y .

שיעור ה x של נקודה A הוא 0 .

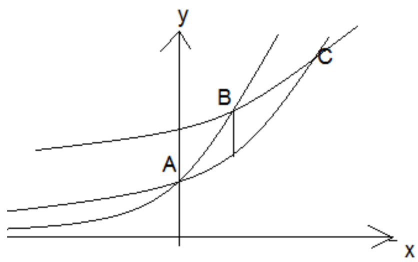
נקודה B : הפונקציות $f(x),h(x)$ נחתכות בנקודה B .

$x_B=\ln 2 \Leftarrow e^x=2 \Leftarrow e^{2x}=4 \Leftarrow e^{3x}=4e^x$.

נקודה C : הפונקציות $g(x),h(x)$ נחתכות בנקודה C .

$x_C=\ln 4 \Leftarrow e^x=4 \Leftarrow e^{2x}=4e^x$.

נחלק את השטח המבוקש לשני חלקים



נחשב את השטח השמאלי $\int_{0}^{\ln 2}(e^{3x}-e^{2x})dx=\left[\frac{e^{3x}}{3}-\frac{e^{2x}}{2}\right]_{0}^{\ln 2}=\left(\frac{e^{3\cdot\ln 2}}{3}-\frac{e^{2\cdot\ln 2}}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$.

נחשב את השטח הימני $\int_0^{\ln 2}\left(4e^x-e^{3x}\right)dx=\left[4e^x-\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^{\ln 2}=\left(4e^{\ln 2}-\frac{e^{3\cdot\ln 2}}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

סה"כ השטח הוא: $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}=2.5$.

שאלה 5

ישר העובר דרך הראשית, מחלק את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=-x^3+4x$ וציר ה x ברביע הראשון, לשני חלקים שווים.
מצא את משוואת הישר ואת נקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

פתרון שאלה 5

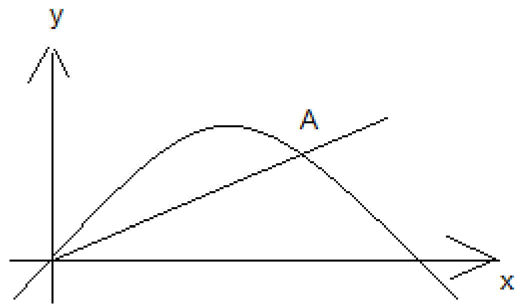
ישר העובר דרך הראשית הוא מהצורה $y=ax$.
נמצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה x.

$-x^3+4x=0 \Leftarrow -x\left(x^2-4\right)=0 \Leftarrow x_1=0, x_2=2, x_3=-2$.

נמצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה x ברביע הראשון.

$\int_0^2\left(-x^3+4x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=-\frac{2^4}{4}+2\cdot 2^2=4$.

הישר מחלק את השטח לשני חלקים שווים, ולכן השטח המוגבל בין הישר לפונקציה הוא 2.



נמצא את שיעור ה x של הנקודה A באמצעות a.

$-x^3+4x=ax \Leftarrow -x\left(x^2-4+a\right)=0 \Leftarrow x=\sqrt{4-a}$.

$$\int_0^{\sqrt{4-a}}\left(-x^3+4x-ax\right)dx=2$$

$$\int_0^{\sqrt{4-a}}\left(-x^3+4x-ax\right)dx=\left[\frac{-x^4}{4}+2x^2-\frac{ax^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-a}}=\frac{-(4-a)^2}{4}+2\cdot(4-a)-\frac{a\cdot(4-a)}{2}=$$

$$=-4+2a-\frac{a^2}{4}+8-2a-2a+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}-2a+4$$

נפתור את המשוואה: $\frac{a^2}{4}-2a+4=2$

$\frac{a^2}{4}-2a+4=2 \Leftarrow a^2-8a+8=0 \Leftarrow a=\frac{8-\sqrt{32}}{2}=4-\sqrt{8}$, התשובה השנייה לא בתחום.

משוואת הישר $y=\left(4-\sqrt{8}\right)x$, נקודת החיתוך $\left(\sqrt[4]{8},\sqrt[4]{8}\cdot\left(4-\sqrt{8}\right)\right)$

שאלה 6

חשב את אורך הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בתחום $0\le x\le 1$.

ב. $f(x)=\ln(\cos x)$ בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{4}$.

פתרון שאלה 6

אורך עקום: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

סעיף א

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \Leftarrow f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \Leftarrow \left(f'(x)\right)^2=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} \Leftarrow 1+\left(f'(x)\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

סה"כ קיבלנו ש $1+\left(f'(x)\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \Leftarrow \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|$.

מכיוון ש $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ חיובי לכל x נקבל ש $\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

$$\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\approx 1.175$$

סעיף ב

$$f(x)=\ln(\cos x) \Leftarrow f'(x)=\tan x \Leftarrow \left(f'(x)\right)^2=\tan^2 x \Leftarrow 1+\left(f'(x)\right)^2=1+\tan^2 x \Leftarrow 1+\left(f'(x)\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$$

סה"כ קיבלנו ש $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\frac{1}{|\cos x|}$. נשים לב שבתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ $\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$.

נשאר לחשב $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$.

נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int\frac{1}{\cos x}dx$.

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+\int\cos x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+\sin x$$

נשאר לחשב את $\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx$$

נציב $t=\sin x$ ואז $dt=\cos x\,dx$.

$$\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-\int\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt=-\int 1dt+\int\frac{1}{1-t^2}dt=-t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t}dt=-t+\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln|1-t|$$

סה"כ קיבלנו ש

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=-\sin x+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\sin x=\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0.881$$

שאלה 7

השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ ציר y, ציר x והישר $x=\pi$ מסתובב סביב ציר x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

<u>פתרון שאלה 7</u>

נפח של גוף סיבוב: סביב ציר x : $v=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$.

$v=\pi\int_a^b (f(x))^2dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 xdx$.

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$\pi\int_0^\pi \sin^2 xdx=\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$.

<u>שאלה 8</u>

השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ לציר x, בתחום $-1\le x\le 2$ מסתובב סביב ציר y.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

<u>פתרון שאלה 8</u>

נפח של גוף סיבוב סביב ציר y : $v=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

הפונקציה היא פונקציה זוגית, ולכן נפח גוף הסיבוב שנוצר בתחום $-1\le x\le 2$ שווה לנפח גוף הסיבוב שנוצר בתחום $0\le x\le 2$.

$V=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2dx=2\pi\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=8\pi$.

<u>שאלה 9</u>

רבע העיגול $x^2+y^2=9$ ברביע הראשון, מסתובב סביב ציר y. מצא את שטח הפנים של הגוף.

<u>פתרון שאלה 9</u>

נשתמש בנוסחה $S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

רבע העיגול ברביע הראשון, ולכן ניתן לרשום $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \Leftarrow 1+(f'(x))^2=1+\frac{x^2}{9-x^2} \Leftarrow \sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$.

$S=2\pi\int_0^3\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

נפתור את האינטגרל הלא מסוים $\int\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

נציב $t=9-x^2 \Leftarrow dt=-2xdx$

$\int\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=-3\sqrt{t}=-3\sqrt{9-x^2}$.

$S=2\pi\int_0^3\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}dx=2\pi\left[-3\sqrt{9-x^2}\right]_0^3=18\pi$.

<u>שאלה 10</u>

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה. הוכח כי: $\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx$.

<u>פתרון שאלה 10</u>

נציב $t=\pi-x \Leftarrow dt=-dx$

$$\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f\left(\sin(\pi-t)\right)dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f\left(\sin t\right)dt = \int_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin t\right)dt - \int_0^{\pi} t\cdot f\left(\sin t\right)dt$$

$$2\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx = \int_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin x\right)dx \Rightarrow \int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx$$

לחלק השני של השוויון מספיק להראות ש $\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx$ ז"א מספיק להראות ש

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\sin x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx$$

נציב $t=\pi-x \Leftarrow dt=-dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin(\pi-t)\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\sin t\right)dt.$$