הוכחה של משפט הפונקציה הסתומה עבור מערכת של 3 משוואות

18 בינואר 2017

נניח שנתונה מערכת

$$\begin{cases} F\left(x_1,..,x_k,y_1,y_2,y_3\right)=0 \\ G\left(x_1,..x_k,y_1,y_2,y_3\right)=0 \\ H\left(x_1,..,x_{k,}y_1,y_2,y_3\right)=0 \end{cases}$$

כדי להראות שהמערכת מגדירה y_1,y_2,y_3 להיות פונקציות של $x_1,x_2,..,x_k$, נחפש למערכת הזאת פתרון מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} y_1=\phi_1\left(x_1,...,x_k\right) \\ y_2=\phi_2\left(x_1,...,x_k\right) \\ y_3=\phi_3\left(x_1,...,x_k\right) \end{cases}$$

או במילים אחרות נחפש פונקציות y_1,y_2,y_3 כך שאם נציבם במערכת נקבל שוויון.

נניח שהפונקציות F,G,H דיפרנציאביליות בסביבת הנקודה $x_0=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_k^0,y_1^0,y_2^0,y_3^3\right)$ וקיימות פונקציות y_1,y_2,y_3 כפתרון של מערכת ובעלות נגזרות חלקיות בסביבת הנקודה $y_0=\left(x_1^0,x_2^0,..,x_k^0\right)$.

נחשב את הנגזרות $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_3}{\partial x_j}$ לכל $1\le i\le k$.

נגזור כל אחת מהמשוואות לפי x_j ונקבל לפי כלל השרשרת:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0 \\ \frac{\partial H}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_3}{\partial x_j}$.

לפי משפט קרמר למערכת קיים פתרון אם ורק אם

$$|J| = \begin{vmatrix} F_{y_1} & F_{y_2} & F_{y_3} \\ G_{y_1} & G_{y_2} & G_{y_3} \\ H_{y_1} & H_{y_2} & H_{y_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

כאשר J היא מטריצת יעקובי.

ולכן כדי למצוא את הפתרון למערכת נשתמש במשפט קרמר:

נחליף את העמודה הראשונה ביעקוביאן בעמודה של מקדמים חופשיים ונקבל:

$$|J_1| = \frac{D(F,G,H)}{D(x_j,y_2,y_3)} = \begin{vmatrix} F_{x_j} & F_{y_2} & F_{y_3} \\ G_{x_j} & G_{y_2} & G_{y_3} \\ H_{x_j} & H_{y_2} & H_{y_3} \end{vmatrix}$$

באותו אופן נחליף את העמודה השנייה בנגזרת לפי x_j, ונקבל $|J_2|$, ואם נחליף את העמודה השלישית נקבל $|J_3|$, ולכן תוך שימוש במשפט קרמר נקבל $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{J_i}{j}$ כאשר $1 \leq i \leq 3$, $j = 1, ..., k$