אינפי 4 - הרצאה 8

24 באוגוסט 2011

תבניות דיפרנציאליות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי שלהן - המשך

דוגמה פיזיקלית אחרונה לתבנית עבודה

קרון בעל מסה m נע במרחב. כח הגרביטציה פועל עליו רק כלפי מטה (כלומר בכיוון ציר z השלילי), כלומר אל מרכז כדוה"א.
השדה הוקטורי הגרביטציוני יהיה שדה קבוע:

$$F=\begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix}$$

תבנית העבודה המתאימה היא:

$$\varphi_{\overrightarrow{x}}=-mgdz$$

אם הקרון נוסע מנק' $\overrightarrow{a}=(a_1,\,a_2,\,0)$ אל הנק' $\overrightarrow{b}=(b_1,\,b_2,\,0)$ על מישור xy. בהנחה שאין חיכוך אנו לא זקוקים בכלל לעבודה כדי לבצע נסיעה.
מתמטית:

$$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=(b_1-a_1,\,b_2-a_2,\,0)$$

מאונך לכח הגרביטזציה F.
בעצם:

$$\overrightarrow{F}\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\0\end{pmatrix}=-mgdz\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\0\end{pmatrix}=-mg\cdot 0=0$$

לעומת זו, אם הקרון מתגלגל במישור משופע, כח הגרביטציה פועל עליו והעבודה היא המכפלה הסקלרית של הכח בוקטור הנסיעה:

$$-mgdz\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}=-mg\left(b_3-a_3\right)$$

2-form - השטף

אם F הוא שדה וקטורי שמוגדר על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^3$ נוכל להתאים לF תבנית דיפרנציאלית מסדר 2 הנקראת תבנית השטף - flux-form.
הגדרה:

$$\phi_{\overrightarrow{F}}=F_1dy\wedge dz+F_2dz\wedge dx+F_3dx\wedge dy$$

כאשר

$$F=\begin{pmatrix}F_1\left(x\right)\\F_2\left(x\right)\\F_3\left(x\right)\end{pmatrix}$$

כאשר תבנית זו פועלת על שני וקטורים במרחב המשיק לנקודה:

$$\overrightarrow{x}=(x,\,y,\,z)$$

אנו מקבלים:

$$\phi_{\overrightarrow{F}}\left(\overrightarrow{v},\,\overrightarrow{w}\right)=F_1\left(\overrightarrow{x}\right)dy\wedge dz\left(\overrightarrow{v},\,\overrightarrow{w}\right)+F_2\left(\overrightarrow{x}\right)dz\wedge dx\left(\overrightarrow{v},\,\overrightarrow{w}\right)+F_3\left(\overrightarrow{x}\right)dx\wedge dy\left(\overrightarrow{v},\,\overrightarrow{w}\right)$$

אם נכתוב

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{w} &= \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אז:

$$\phi_{\overrightarrow{F}}=F_1\left(\overrightarrow{x}\right)\begin{vmatrix}v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{vmatrix}+F_2\left(\overrightarrow{x}\right)\begin{vmatrix}v_3 & w_3\\ v_1 & w_1\end{vmatrix}+F_3\left(\overrightarrow{x}\right)\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\end{vmatrix}$$

הערה

ב-$\mathbb{R}^3$, כל תבנית מסדר 2 חייבת להראות כך, לכן בעצם כל diff 2-form ב-$\mathbb{R}^3$ מתאימה לשאף של שדה וקטורי.

אינטגרל השטף

נניח כי $\gamma:\ U\to\mathbb{R}^n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ונניח F שדה וקטורי:

$$F:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

אזי:

$$\begin{aligned}\int_\gamma\phi_{\overrightarrow{F}} &= \int_\gamma\phi_{\overrightarrow{F}\,(\gamma(u))}\left(\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial v}\right)dudv\\ &= \iint\begin{vmatrix}F_1 & | & |\\ \vdots & \frac{\partial\gamma}{\partial u_1} & \frac{\partial\gamma}{\partial v}\\ F_n & | & |\end{vmatrix}dudv\end{aligned}$$

דוגמה

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}:\ \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3\\ \overrightarrow{F}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x\\y^2\\z\end{pmatrix}\\ \gamma:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ \gamma\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}u^2\\uv\\v^2\end{pmatrix}\\ 0\leq\quad u,\,v &\quad\leq 1\end{aligned}$$

אזי:

$$\begin{aligned}\int_\gamma\phi_{\overrightarrow{F}} &= \int_0^1\int_0^1\det\begin{pmatrix}u^2 & 2u & 0\\ u^2v^2 & v & u\\ v^2 & 0 & 2v\end{pmatrix}dudv\\ &= \int_0^1\int_0^1\left(2u^2v^2-4u^3v^3+2u^2v^2\right)dudv=\frac{7}{36}\end{aligned}$$

המשמעות הפיזיקלית של השטף

נניח שמים עוברים דרך משטח. השטף מוגדר להיות כמות המים שנכנסת למשטח ביחידה זמן.
(או בחשמל: כמות המטען הנכנסת לתווך מסוים ביחידת זמן = זרם).
אם $\overrightarrow{F}:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מייצג את שדה המהירות, אז הכמות של המים שנכנסת מושפעת רק בכיוון המאונך למשטח בכל נק'.
לכן, אם לכל $x\in\mathbb{R}^3$ נבחר $\overrightarrow{n}\left(\overrightarrow{x}\right)$ להיות נורמל יחידה חיצוני למשטח בנק' זו, הכמות שתיכנס למשטח בנק' זו תהיה:

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{\gamma}\left(u,\,v\right)\right)\cdot\overrightarrow{n}\left(\overrightarrow{\gamma}\left(u,\,v\right)\right)$$

הנורמל $\overrightarrow{n}$ בכל נק':

$$\overrightarrow{n}=\frac{\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u}\times\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial v}}{\left\Vert \frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u}\times\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial v}\right\Vert }$$

נניח ב.ה.כ ש$\overrightarrow{n}$ כבר מנורמל מראש.
אפשר להראות שמתקיים:

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=\det\left(\overrightarrow{F},\,\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u},\,\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial v}\right)=\phi_{\overrightarrow{F}}$$

לכן אנו מקבלים:

$$\int_{\gamma}\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{\gamma}\left(u,\,v\right)\right)\cdot\overrightarrow{n}\left(\overrightarrow{\gamma}\left(u,\,v\right)\right)ds=\int_{\gamma}\phi_{\overrightarrow{F}}$$

(כאשר

$$ds=\left\Vert \frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u}\times\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u}\right\Vert dudv$$

זהו אלמנט השטח של משטח S)

3-form ב$\mathbb{R}^3$ - צפיפות

ב$\mathbb{R}^3$ יש רק סוג אחד של 3-form והוא:

$$f\cdot dx\wedge dy\wedge dz$$

(עד כדי שינוי סדר הדיפרנציאל).
נשים לב לכך ש$dx\wedge dy\wedge dz$ היא פונק' הדטרמיננטה, לכן נגדיר את תבנית הצפיפות כתבנית שמתאימה לכל פונק'

$$f:\ U\to\mathbb{R}$$

כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^3$ את:

$$\left(\rho_{f}\right)_{\overrightarrow{x}}\left(\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{v_2},\,\overrightarrow{v_3}\right)=f\left(\overrightarrow{x}\right)\cdot\begin{vmatrix}| & | & |\\ \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3}\\ | & | & |\end{vmatrix}$$

איך נראה אינטגרל של תבנית זו?

אם

$$\begin{aligned}U & \subseteq\mathbb{R}^3\\ V & \subseteq\mathbb{R}^3\\ \overrightarrow{\gamma} & :\ U\to V\\ \overrightarrow{\gamma} & =\overrightarrow{\gamma}\left(x,\,y,\,z\right)\end{aligned}$$

אם γ גזירה ברציפות, אז עבור $f:\ V\to\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\rho_f &= \iiint_U \rho_f\left(\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial x},\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial y},\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial z}\right)dxdydz\\ &= \iiint_U f\left(\overrightarrow{\gamma}\left(x,\,y,\,z\right)\right)\cdot\det\begin{pmatrix}| & | & |\\ \frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial x} & \frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial y} & \frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial z}\\ | & | & |\end{pmatrix}dxdydz\end{aligned}$$

אם במקרה $U=V$ ו־$\gamma=Id_U$ (זהות על U) אז בעצם זהו אינטגרל של פונק' ממשית $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ בתוך U.
אם f מסמנת צפיפות מסה של משטח מסוים (משקל סגולי של כל נק' על המשטח), אז האינטגרל הנ"ל הוא ה<u>מסה</u> הכוללת של המשטח.

דוגמה

נתון לנו טורוס (שטוח) ב־$\mathbb{R}^3$.
עבור $0<r<R$ נסמן ב־$T_{r,\,R}$ את הטורוס המתקבל ע"י סיבוב המעגל ברדיוס r ומרכזו בנק' $\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}$ במישור xz סביב ציר z.
נניח כי

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2$$

צפיפות המסה של הטורוס הנ"ל.
נחשב את המסה של הטורוס, כלומר את האינטגרל של ρ_f על התחום שכולא הטורוס (בפנים הטורוס).
נתבונן בפרמטריזציה של $T_{r,\,R}$:

$$\begin{aligned}\gamma\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(R+u\cos v)\cos w\\(R+u\cos v)\sin w\\u\sin v\end{pmatrix}\\ 0\leq\quad & u\quad\leq r\\ 0\leq\quad & v,\,w\quad\leq 2\pi\end{aligned}$$

נסמן

$$U=\left\{(u,\,v,\,w)\ \mid\ \begin{matrix}0\leq u\leq r\\0\leq v,\,w\leq 2\pi\end{matrix}\right\}$$

תשובה

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\rho_f &= \iiint_U f\left(\gamma\left(u,\,v,\,w\right)\right)\det\left(\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{\gamma}}{\partial w}\right)dudvdw\\ &= \iiint_U f\begin{pmatrix}(R+u\cos v)\cos w\\(R+u\cos v)\sin w\\u\sin v\end{pmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos v\cdot\cos w & -u\sin v\cos w & -(R+u\cos v)\sin w\\ \cos v\sin w & -u\sin v\sin w & (R+u\cos v)\cos w\\ \sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}dudvdw\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r (R+u\cos v)^2\cdot\begin{vmatrix}\cos v\cdot\cos w & -u\sin v\cos w & -(R+u\cos v)\sin w\\ \cos v\sin w & -u\sin v\sin w & (R+u\cos v)\cos w\\ \sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}dvdwdu\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r -u\cdot(R+u\cos v)^3\left(2\cos^2(w)-1\right)dvdwdu\end{aligned}$$

סיכום: עבודה, שטף צפיפות ב$\mathbb{R}^{n}$ (תבניות דיפרנציאליות)

0-forms הן פונק' בכל המימדים.
1-forms הן תבניות עבודה של שדות וקטוריים בכל המימדים.
n-1-forms הן תבניות השטף של שדה וקטורי ב$\mathbb{R}^{n}$.
אם $f\,:\,\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ שדה וקטורי על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ אז:

$$\phi_{\overrightarrow{F}}\left(\overrightarrow{v_{1}},\,...,\,\overrightarrow{v_{n-1}}\right)=\det\left(\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{x}\right),\,\overrightarrow{v_{1}},\,...,\,\overrightarrow{v_{n-1}}\right)$$

ב$\mathbb{R}^{2}$, diff 1-form הן גם עבודה:

$$f_{1}dx+f_{2}dy$$

וגם שטף:

$$\det\left(\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{x}\right),\,\overrightarrow{v}\right)$$

כל n-form היא תבנית צפיפות של פונק' סקלרית.

גזירה (חיצונית) (או דיפרנציאל) של תבניות דיפרנציאליות

נניח שיש לנו 0-diff-form כלומר פונק' $f\,:\,\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$.
הדיפרנציאל של f הוא העתקה לינארית $df\,:\,\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$, והמטריצה המייצגת היא:

$$\overrightarrow{\nabla f}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}},\,\frac{\partial f}{\partial x_{2}},\,...,\,\frac{\partial f}{\partial x_{2}}\right)$$

את df ניתן לרשום כך:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\cdot dx_{1}+...+\frac{\partial f}{\partial x_{n}}dx_{n}=\overrightarrow{\nabla f}\cdot\left(dx_{1},\,...,\,dx_{n}\right)$$

כי כל העתקה לינארית $T\,:\,\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ ניתן להציג:

$$T=\alpha_{1}dx_{1}+...+\alpha_{n}dx_{n}$$

כאשר $\alpha_{1}=T\left(e_{i}\right)$, ואצלנו:

$$df\left(e_{i}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(e_{i}\right)$$

ניתן להכליל רעיון זה לנגזרת של תבנית מסדר גבוה יותר.
נניח ש:

$$\alpha\left(\overrightarrow{x}\right)-\sum_{I}a_{I}\left(\overrightarrow{x}\right)dx_{I}$$

היא k-תבנית דיפרנציאלית, המוגדרת בקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$. נגדיר את הדיפרנציאל של α להיות התבנית הדיפרנציאלית $k+1$-מימדית, המוגדרת על U כך:

$$d\alpha=\sum_{I}d\left(\alpha_{I}\right)\wedge dx_{I}$$

(כאשר $d\left(\alpha_{I}\right)$ גזירה של פונק' בn משתנים), כלומר הגזירה מתרחשת על כל מקדם בפני עצמו.

דוגמה

ניקח

$$w=Pdx+Qdy+Rdz$$

1-תבנית דיפר' ב-$\mathbb{R}^3$.
נחשב את הדיפרנציאל:

$$\begin{aligned}
dw &= dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\
&+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\
&+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz\\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz
\end{aligned}$$

משפט

אם $\varphi\in A^k_{\mathrm{diff}}(u)$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קב' פתוחה, כאשר כל מקדמיה גזירים פעמיים ברציפות לפחות, אז מתקיים:

$$d^2\varphi=d(d\varphi)=0$$

הוכחה

תחילה עבור 0-diff-forms:

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)=\sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\wedge dx_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_j\wedge dx_i=0
\end{aligned}$$

מדוע זה מתאפס? כי כאשר $i=j$ אז $dx_i\wedge dx_i=0$.
כאשר $i\neq j$, האיברים $dx_i\wedge dx_j$ ו-$dx_j\wedge dx_i$ מתבטלים.
עבור $k>0$:

$$\begin{aligned}
d(d(fdx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k})) &= d(df\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k})\\
&= d(df)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=0
\end{aligned}$$

משפט (ללא הוכחה)

אם φ k-תבנית דיפר', ψ ℓ-תבנית דיפר', אז:

$$d(\varphi\wedge\psi)=d\varphi\wedge\psi+(-1)^k\varphi\wedge d\psi$$

הגדרות

1. תבנית גזירה ברציפות $\alpha\in A^k_{\mathrm{diff}}(\mathbb{R}^n)$ נקראת סגורה אם $\alpha\in\ker(d)$, כלומר $d\alpha=0$.
2. תבנית גזירה ברציפות $\alpha\in A^k_{\mathrm{diff}}(\mathbb{R}^n)$ נקראת מדויקת אם $\alpha\in\mathrm{Im}(d)$,כלומר קיימת $\beta\in A^{k-1}_{\mathrm{diff}}(\mathbb{R}^n)$ כך ש-$\alpha=d\beta$.

הערה

בעצם, המשפט שהוכחנו כרגע מראה כי כל תבנית מדויקת היא סגורה.
α מדויקת אז $\alpha=d\beta$ לכן $d(d\beta)=0$ לכן α סגורה.
גם ההפך נכון במקרים מסוימים - לא נוכיח זאת. זה נקרא הלמה של פואנקרה.

שימוש בנגזרת חיצונית עבור אופרטורים דיפרנציאליים

נגדיר (בחלקם מחדש) את האופרטורים הדיפרנציאליים ב$\mathbb{R}^3$:

הגדרה

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצה פתוחה, ונניח $f : U \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ו$\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שדה גזיר ברציפות.
אזי הגרדיאנט הוא:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

הרוטור הוא:

$$\overrightarrow{\mathrm{curl}} f = \overrightarrow{\mathrm{rot}} f = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ - & \overrightarrow{\nabla} & - \\ - & \overrightarrow{F} & - \end{vmatrix}$$

כאשר

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

והדיברגנץ הוא:

$$\begin{aligned} \mathrm{div} \overrightarrow{F} &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

כל האופרטורים הנ"ל קשורים לתבניות דיפר' ב$\mathbb{R}^3$.

משפט

יהי F, f כמו בהגדרה.

1.

$$df = W_{\overrightarrow{\nabla f}}$$

2.

$$dW_{\overrightarrow{F}} = \phi_{\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}}$$

3.

$$d\phi_{\overrightarrow{F}} = \rho_{\mathrm{div} \overrightarrow{F}} = \rho_{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}}$$

הוכחה

נוכיח רק את שני הסעיפים הראשונים. הוכחת סעיף ג' דומה להוכחת ב'.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, אז:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \\ &= \overrightarrow{\nabla f} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = W_{\overrightarrow{\nabla f}} \end{aligned}$$

.2 $F_1,\, F_2,\, F_3:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
dW_{\overrightarrow{F}} &= d\left((F_1,\, F_2,\, F_3)\cdot(dx_1,\, dx_2,\, dx_3)\right)\\
&= d\left(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3\right)\\
&= d\left(F_1 dx_1\right) + d\left(F_2 dx_2\right) + d\left(F_3 dx_3\right)\\
&= dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 + dF_3 \wedge dx_3\\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}dx_3\right)\wedge dx_1\\
&+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}dx_3\right)\wedge dx_2\\
&+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}dx_3\right)\wedge dx_3\\
&= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)dx_1\wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3\\
&= \phi_{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}}
\end{aligned}
$$

דיאגרמה מתחלפת

$$
\begin{array}{rcl}
\text{functions} & \Longleftrightarrow & \text{0-forms}\\
\downarrow \text{grad} & & \\
\text{vector fields} & \text{work}\,(W) & \text{1-forms}\\
\downarrow \text{rot,curl} & & \\
\text{vector fields} & \text{flux}\,(\phi) & \text{2-forms}\\
\downarrow \text{div} & & \\
\text{functions} & \text{density}\,(\rho) & \text{3-forms}
\end{array}
$$

משפט גרין בצורה קומפקטית (במישור)

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום ונוח ב-$\mathbb{R}^2$, ו-$\overrightarrow{F}$ שדה וקטורי גזיר ברציפות המוגדר בסביבה של D, אז:

$$\int_D dW_{\overrightarrow{F}} = \int_{\partial D} W_{\overrightarrow{F}}$$

הניסוח הרגיל של גרין הוא:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} P\,(x,\, y)\,dx + Q\,(x,\, y)\,dy$$

מדוע זה אותו דבר?

$$
\begin{aligned}
F &= (P,\, Q)\\
W_F &= Pdx + Qdy
\end{aligned}
$$

באותו אופן כמו בהוכחת סעיף ב' של המשפט הקודם מראים כי:

$$d_{W_F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

ולכן הרישום נובע מגרין הרגיל.

משפט סטוקס הכללי (ללא הוכחה)

את המשפט היסודי של החדו"א:

$$\int_{a}^{b}f^{'}\left(t\right)dt=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

עבור פונק' גזירה ברציפות f המוגדרת ב$[a,\,b]$, ניתן לרשום כך:

$$\int_{[a,\,b]}df=\int_{\partial[a,\,b]}f$$

משפט סטוקס הכללי הוא:
בתנאים מסויימים על תחום $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ (למשל, יש דרישה של תחום חסום-סגור, כלומר קומפקטי), ועבור $\varphi\in A_{\text{diff}}^{k}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ מתקיים:

$$\int_{D}d\varphi=\int_{\partial D}\varphi$$

דוגמה

נחשב את האינטגרל:

$$\int_{\partial D}\left(xdy-ydx\right)$$

כאשר D הוא הריבוע:

$$D=\left\{ (x,\,y)\in\mathbb{R}^{2}\,\mid\,-1\leq x,\,y\leq1\right\}$$

פתרון

נשתמש במשפט סטוק ונקבל:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D}xdy-ydx & = & \int_{D}d\left(xdy-ydx\right)\\
 & = & \int_{D}2dx\wedge dy\\
 & = & 2\int_{D}dxdy\\
 & = & 2\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dxdy\\
 & = & 2\cdot2\cdot2=8
\end{aligned}$$