בס"ד

אלגברה לינארית תרגיל 8 -פתרון

שאלה 1:

.1 $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&5&8&0\\3&6&9&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&-6&-12&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=1,\beta=-2,\alpha=1$ פותר את המערכת לכן

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

.2 $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\4\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&2&8&0\\3&6&4&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&0&-6&0\\0&-6&-17&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-6&-17&0\\0&0&-6&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=0,\beta=0,\alpha=0$ הוא הפתרון היחיד של המערכת ולכן B_2היא קבוצה בתל

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון. אנחנו מחפשים $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

המטריצה כבר מדורגת והפתרון היחיד שלה הוא $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 0$ B_5היא קבוצה בת"ל

שאלה 2:

א. כדי ש-v יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, צריך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix}1\\m\\-m\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן נשים במטריצה ונפתור.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\2&1&m\\3&-1&-m\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-3&m-2\\0&-7&-m-3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow\frac{R_2}{-3}}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&\frac{m-2}{-3}\\0&-7&-m-3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+7R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&\frac{m-2}{-3}\\0&0&\frac{10m-5}{-3}\end{array}\right)$$

כדי שלא נקבל שורת סתירה וכדי שהוא באמת יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, נדרוש ש: $\frac{10m-5}{-3}=0$. ולכן נקבל: $m=\frac{1}{2}$.

מכאן נקבל: $\alpha=0,\beta=\frac{1}{2}$. ולכן הצירוף הלינארי הוא: $\begin{pmatrix}1\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

ב. כדי ש-v יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, צריך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix}m\\-1\\-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-m\end{pmatrix}$$

ולכן נשים במטריצה ונפתור.

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&2&m\\2&1&-1\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\2&1&-1\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\0&-1&-2m-3\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-mR_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\0&-1&-2m-3\\0&0&2m^2+3m-2\end{array}\right)$$

כדי שלא נקבל שורת סתירה וכדי שהוא באמת יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, נדרוש ש: $2m^2+3m-2=0$. ולכן נקבל: א $m=\frac{1}{2}$ ו $m=-2$.

מכאן נקבל עבור $m=\frac{1}{2}$: $\alpha=-2.5,\beta=4$. ולכן הצירוף הלינארי הוא:

$$\begin{pmatrix}1/2\\-1\\-2\end{pmatrix}=-2.5\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\\-0.5\end{pmatrix}.$$

ועבור $m=-2$: $\alpha=0,\beta=-1$. ולכן הצירוף הלינארי הוא: $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 4:</u>

מההנחה ש- v_3, v_2, v_1 תלויים לינארית, נובע כי קיימים $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ לא כולם אפס כך ש-

$(*)\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \underline{0}$. אם $\lambda_3 \neq 0$ אז מ-(*) יוצא כי $v_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2$, ו- v_3 הוא צרוף לינארי של v_1 ו- v_2, מה שסותר את ההנחה על v_3. לכן $\underline{\lambda_3 = 0}$. נציב ב-(*) ונקבל $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0\ (**)$.

אם $\lambda_2 = 0$ אז $\lambda_1 \neq 0$ כי $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ לא כולם אפס ו- $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$. הצבה ב-(**) נותנת כי $\lambda_1 v_1 = 0$ וכך מסיקים ש- $v_1 = 0$, זו סתירה להנחה שהוקטורים v_3, v_2, v_1 שונים מ- $\underline{0}$. לכן $\lambda_2 \neq 0$ ומתקבל ש- $v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$, מה שנדרש עם $k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

שאלה 6:

(1) ברור כי $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(\text{Span}(S_1))$ כי $\text{Span}(\text{Span}(S_1))$ הוא תת המרחב הוקטורי הקטן ביותר המכיל את $\text{Span}(S_1)$. אבל, מכיוון ש נשים לב, $\text{Span}(S_1)$ הוא תת מרחב וקטורי של V. לכן הוא תת המרחב הוקטורי הקטן ביותר המכיל את עצמו. מההגדרה של $\text{Span}(\text{Span}(S_1))$ כתת במרחב הוקטורי הקטן ביותר של V המכיל את $\text{Span}(S_1)$ נקבל את השוויון הדרוש:

$$\text{Span}(S_1) = \text{Span}(\text{Span}(S_1))$$

(2) כל צירוף ליניארי של איברי S_1 הוא בפרט צירוף ליניארי של איברי S_2. לכן $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(S_2)$.

(3) We must show $\text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2) = (0)$ and $\text{span}(S_1) + \text{span}(S_2) = \text{span}(S_1 \cup S_2)$.
Suppose $v \in \text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$. Then there are $u_1, \ldots, u_m \in S_1$, $v_1, \ldots v_n \in S_2$, and $\lambda_1, \ldots \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F}$ such that

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i.$$

Then

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i,$$

so all constants are zero as $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n\} \subset S_1 \cup S_2$ is linearly independent. Thus $v = 0$.
Suppose $v \in \text{span}(S_1 \cup S_2)$. Then there are $u_1, \ldots, u_m \in S_1$, $v_1, \ldots v_n \in S_2$, and $\lambda_1, \ldots \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F}$ such that

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in \text{span}(S_1) + \text{span}(S_2).$$

Suppose $v \in \text{span}(S_1) + \text{span}(S_2)$. Then there are $x_i \in \text{span}(S_i)$ for $i = 1, 2$ such that $v = x_1 + x_2$. Thus, there are $u_1, \ldots, u_m \in S_1$, $v_1, \ldots v_n \in S_2$, and $\lambda_1, \ldots \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F}$ such that

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \text{ and } x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i.$$

Hence

$$v = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in \text{span}(S_1 \cup S_2).$$

<u>שאלה 7:</u>

<u>סעיף א</u>

הנפרש לא שווה לקבוצה המושווית אליו.

$$\left(0,0,1\right)\notin span\left\{\left(2,0,4\right),\left(0,1,0\right),\left(6,5,12\right)\right\}$$

מכיוון שאם $\left(0,0,1\right)\in span\left\{\left(2,0,4\right),\left(0,1,0\right),\left(6,5,12\right)\right\}$ אז היינו מקבלים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ כך ש
$\alpha\left(2,0,4\right)+\beta\left(0,1,0\right)+\gamma\left(6,5,12\right)=\left(0,0,1\right)$ אבל לא ייתכן ש $2\alpha+6\gamma=0\wedge 4\alpha+12\gamma=1$.

<u>סעיף ב</u>

הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו.

$$\mathbb{R}_3\left[x\right]=span\left\{1,x+x^2,4x^3+x^2,2x\right\}$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_0\cdot 1+\left(a_2-\frac{1}{4}a_3\right)\left(x+x^2\right)+\frac{1}{4}a_3\left(4x^3+x^2\right)+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{8}a_3\right)\cdot\left(2x\right)$$

<u>סעיף ג</u>

הנפרש לא שווה לקבוצה המושווית אליו

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\notin span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$$

מכיוון שאם $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$ אז היינו מקבלים $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ כך ש

$$\alpha+\beta+5\delta=0,2\alpha+\beta+5\delta=1\rightarrow\alpha=1$$
$$2\alpha-\beta+\gamma+3\delta=0,\alpha-\beta+\gamma+3\delta=0\rightarrow\alpha=0$$

שאלה 3:

ג) נבטא כל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כווקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

נבדוק האם הוקטורים בת"ל/ת"ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן: $\alpha_3 = t$

$\alpha_1 = -t$

$\alpha_2 = 3t$

הפתרון הכללי

$$\begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבחר $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 3$ $\alpha_3 = 1$

ונקבל

$$-1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לאמר נמצאות ת"ל הצירוף

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = +3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כנדרש.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו ש $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ כלומר הוקטורים הם בת"ל

שאלה 2: יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ אזי

הערה: כל פולינום $a+bx+cx^2+dx^3$ נציג בתור וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

1. נבדוק האם הוקטורים תלויים כלומר יש צ"ל שמתקיים

$\alpha_1 p_1(x)+\alpha_2 p_2(x)+\alpha_3 p_3(x)+\alpha_4 p_4(x)=0$ כאשר $\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

כלומר צריך לבדוק האם למערכת הבאה יש פתרון טריוויאלי (בת"ל) או לא טריוויאלי (ת"ל). עבור α

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 14 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{פישוט נקבל}]{\text{לאחר דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לעמודות הג' והד' אין איבר מוביל, לכן הקבוצה ת"ל.

ו $p_3(x)$ ו $p_4(x)$ ת"ל.

ב) נמצא פתרון כללי של המערכת נסמן $\alpha_3=t$, $\alpha_4=s$

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}s \qquad \alpha_2=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}s$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבחר לדוגמא $t=2, s=0$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$-p_1(x)+p_2(x)+2p_3(x)=0$$

$$\downarrow$$

$$p_3(x)=\frac{1}{2}p_1(x)-\frac{1}{2}p_2(x)$$

ונבחר $t=0 \quad s=4$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$-p_1(x)-p_2(x)+4p_4(x)=0$$

$$p_4(x)=\frac{1}{4}p_1(x)+\frac{1}{4}p_2(x)$$ (באותה צורה נקבל את p_2,p_1)

3 נשאלת השאלה האם $p_2\in Span\{p_1,p_4\}$ כלומר האם קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש

$$p_2(x)=\alpha p_1(x)+\beta p_4(x)$$

מסעיף ב ראינו $-1p_1(x)-p_2(x)+4p_4(x)=0$

כלומר אפשר להציג את $p_2(x)$ בתור

$$p_2(x)=-p_1(x)+4p_4(x)$$

לכן $p_2(x)\in Span\{p_1,p_4\}$