# תרגיל 8 – אלגברה מופשטת 1

**1.** ענו על הסעיפים הבאים:

**1.1.** נניח ש- $G$ היא חבורת מסדר $p^k$ עבור $p$ ראשוני ו-$k \geq 1$, וש- $G$ פועלת על קבוצה עם $n$ איברים כש- $p$ לא מחלק את $n$. הוכיחו שקיימת נקודת שבת.

פתרון:נתון $|G| = p^k, |X| = n$ ו- $p$ לא מחלק את $n$. אם $\{x_1, ..., x_t\}$ הם הנציגים של המסלולים אז: $n = \sum_{i=1}^{t} |orb(x_i)| = \sum_{i=1}^{t} \frac{|G|}{|Stab(x_i)|}$. כלומר $n$ הוא סכום גדלי המסלולים, המחלקים את $|G|$. המספרים הטבעיים שיכולים לעשות זאת הם : $\{1, p, p^2, ..., p^k\}$.כלומר, כל מסלול הוא מגודל $p^i$ $(0 \leq i \leq k)$ ו-$n$ הוא סכום הגדלים. לפיכך $n$ הוא מהצורה: $n = a_0 + a_1 p + ... + a_k p^k$. כיוון ש- $p$ לא מחלק את $n$ אז בהכרח $a_0 > 0$; כלומר יש לפחות מסלול אחד באורך 1, משמע – יש נקודת שבת משותפת.

**1.2.** הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה $G$ הפועלת על קבוצה $X$ כך ש- $|G| = |X| = 13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.

פתרון: הפרכה: למשל $G$ פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל. לפעולה זו לא קיימות נקודות שבת (מדוע?).

**2.** עבור $H \leq G$ נגדיר את ה**מנרמל** של $H$ ב- $G$ להיות $N_G(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$. כאשר ההקשר ברור, נרשום פשוט $N(H)$.
הוכיחו:

**2.1.** $N(H) \leq G$ ו- $N(H) = G \Leftrightarrow H \lhd G$;

פתרון: נוכיח תחילה כי $N(H) \leq G$. ברור ש-$N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G \in N(H)$. יהיו $a,b \in N(H)$. מתקיים:

$(ab)H = a(bH) = a(Hb) = (aH)b = (Ha)b = H(ab)$ ולכן $ab \in N(H)$. כעת,

יהי $a \in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H=(aH)^{-1}=(Ha)^{-1}=H(a^{-1})$ ולכן

$a^{-1} \in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H \triangleleft G \Leftrightarrow N(H)=G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H \triangleleft G$ אזי $gH=Hg$ לכל $g \in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

**2.2.** $H \triangleleft N(H)$;

פתרון: רואים מההגדרה כי $H \subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית. קל לראות שלכל $a \in N(H)$ ולכל $h \in H$ מתקיים

$aha^{-1} \in H$.

**2.3.** אם $H \triangleleft K \le G$ אזי $K \le N(H)$.

פתרון: מספיק להראות ש- $K$ מוכלת ב- $N(H)$ (מדוע?). $H \triangleleft K$ ולכן <u>לכל</u> $k \in K$ מתקיים $kHk^{-1}=H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k \in N(H)$. לכן,

$K \subseteq N(H)$.

**3.** נתבונן ב $S_6$ ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma \in S_6 : \sigma(2)=2, \sigma(4)=4, \sigma(6)=6\}$.
הוכיחו ש- $H$ היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- $S_3$. האם היא תת חבורה נורמלית?
הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות $K,L$ – כך ששתיהן איזומורפיות ל- $S_3$ ו- $L \cap K=\{id\}$.

**4.** רשמו את שוויון המחלקות עבור החבורות $S_4, S_5, D_4$ (כלומר, הבעיו את הסדר של כל אחת מהן באמצעות סכום הגדלים של מחלקות הצמידות שלהן. שימו לב לכמות האיברים במרכז).

פתרון: עבור $n \ge 3$ $Z(S_n)$ טריוויאלי. מחלקת צמידות נתונה ב $S_n$ מורכבת מכל התמורות בעלות מבנה מחזורים זהה עבור איזשהו מבנה מחזורים.

משוואת המחלקות של $S_4$ היא $24=1+6+8+6+3$. כאשר בכל אחת ממחלקות הצמידות $\{(--)\},\{(----)\}$ שישה איברים, במחלקת הצמידות $\{(---)\}$ שמונה איברים ובמחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ שלושה איברים.

מהי משוואת המחלקות של $S_5$? גודל מחלקת הצמידות $\{(--)\}$ הוא $\binom{5}{2}=10$.

גודל מחלקת הצמידות $\{(---)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$. גודל מחלקת הצמידות $\{(----)\}$ הוא $\binom{5}{4}3!=30$. גודל מחלקת הצמידות $\{(----)\}$ הוא $4!=24$

גודל מחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ הוא $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}=15$. גודל מחלקת הצמידות $\{(---)(--)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$.

מכאן שוויון המחלקות של $S_5$ היא $120=1+10+20+30+24+15+20$.

מהו שוויון המחלקות של $D_4$?

אפשר לעשות את החישוב ישירות, אך נסו במקום זאת להוכיח את הטענה הבאה:

עבור חבורת-$p$ לא אבלית $G$ מסדר $p^3$ מתקיים $|Z(G)|=p$ וגם לכל $a\notin Z(G)$ מתקיים $|conj(a)|=p$. מכאן כל מחלקת צמידות מגודל $1<$ היא מגודל $p$ ומשוואת המחלקות של חבורה מסוג זה היא:

$p^3=\underbrace{p+p+\cdots+\cdots+p}_{p^2 \quad times}$. בפרט אצלנו $D_4$ לא אבלית מסדר $8=2^3$ לכן משוואת המחלקות שלהמהן היא: $8=2+2+2+2$.

**5.** תהי $G$ חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $1\neq x\in G$, $x$ אינו צמוד להופכי שלו.

פתרון: <u>דרך א'</u>

יהי $1\neq x\in G$ ונניח בשלילה שהוא צמוד לעצמו, כלומר $x^{-1}\in conj(x)$. לכן מחלקת השקילות של $x$ מכילה לפחות שני איברים. היא אינה יכולה להיות מסדר זוגי (כי סדרה חייב לחלק את סדר החבורה) ולכן קיים $y\neq x,x^{-1}$ שנמצא במחלקת השקילות של $x$. נניח בה"כ ש- $y$ צמוד ל-$x$. לכן $y^{-1}$ צמוד ל-$x^{-1}$ (מדוע?) ולכן גם $y^{-1}\in conj(x)$. ושוב יש מספר זוגי של איברים (וודאו ש-$y^{-1}$ אכן שונה מכל האיברים במחלקה). ממשיכים בתהליך דומה עד אשר "נגמרים" האיברים בחבורה, ואנחנו נשארים עם סתירה.

<u>דרך ב'</u>

נניח בשלילה כי $x$ צמוד להופכי שלו, כלומר קיים $g \in G$ כך ש-$gxg^{-1} = x^{-1}$.

נצמיד שוב את שני האגפים עם $g$ ונקבל: $x = \left(gxg^{-1}\right)^{-1} = gx^{-1}g^{-1} = g^2xg^{-2}$,

כלומר $g^2x = xg^2$. הסדר של $g$ הוא אי-זוגי, נניח $o\left(g\right) = 2m+1$ ולכן

$1 = g^{2m+1} = g\left(g^2\right)^m$, כלומר $g^{-1} = \left(g^2\right)^m$. נציב זאת ב-$gxg^{-1} = x^{-1}$ ונקבל $x = x^{-1}$

וזאת סתירה (מדוע?).

**6.** נתון משושה משוכלל שניתן לצבוע את צלעותיו ב-5 צבעים שונים. אם מותר לסובב את המשושה ב-120 מעלות (זאת אומרת, סיבוב כזה יחשב לאותה הצביעה), כמה צביעות שונות יש?

פתרון: תהי $X$ קבוצת כל הצביעות האפשריות של המשושה.
$G = \left\{id, \sigma^2, \sigma^4\right\} \le D_6$ כאשר $\sigma$ הוא סיבוב ב-60 מעלות.
אזי $|\sigma^2| = 3, |\sigma^4| = 3$ ולכן $|X_{id}| = 5^6$. $|X_{\sigma^2}| = |X_{\sigma^4}| = 5^2$
ולכן מספר הצביעות השונות הוא: $k = \frac{1}{3}\left(5^6 + 2\cdot 5^2\right) = 5225$.

בהצלחה! ☺