אלגברה לינארית 2 | חוברת תרגילים של קווין מנדלבאום

קווין מנדלבאום | הצעת פתרון של יונתן סמידוברסקי

חלק 2: תתי מרחבים אינווריאנטים

(שאלה 1)

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי ויהיו $U_1, U_2 \leq V$ תתי מרחבים T-אינווריאנטים.

(א) נוכיח כי $U_1 \cap U_2$ הינו ת"מ אינווריאנטי גם כן.

<u>הוכחה</u> יהי $u \in U_1 \cap U_2$, כעת משום שU_1, U_2 אינווראנטים מתקיים: $Tu \in U_1$ וגם $Tu \in U_2$

סך הכל $Tu \in U_1 \cap U_2$ ולכן הוא גם ת"מ אינווריאנטי.

(ב) נוכיח $U_1 + U_2$

<u>הוכחה</u> יהי $u \in U_1 + U_2$ אזי, נסמן $u = u_1 + u_2$ כך ש$u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

כעת $T(u_1 + u_2) = Tu_1 + Tu_2 = u_1' + u_2'$, כאשר $u_1' = Tu_1 \in U_1$ וגם $u_2' = Tu_2 \in U_2$

$u_1' + u_2' \in U_1 + U_2$ ולכן $T(u) \in U_1 + U_2$, ולכן $U_1 + U_2$ ת"מ אינווריאנטי.

(שאלה 2)

נמצא את כל תתי המרחב הT- אינווריאנטים של $V = \mathbb{R}^2$ כאשר $T = Av$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

בעצם מחפשים את כל התתי מרחבים $U = span\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\}$ כך שלכל $u \in U$ מתקיים $Tu \in U$.

כלומר $u = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ ומתקיים $Tu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a+2b) \\ \alpha(3a+4b) \end{pmatrix}$

אבל זה שייך לU אם ורק אם $b = \beta a$ עבור $\beta \in \mathbb{R}$

כלומר כל ת"מ מהצורה

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\}$$

(שאלה 3)

אם S, T מתחלפות, $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של S ו$V_\lambda \subseteq V$ הוא המ"ע המתאים, אזי V_λ הוא ת"מ T- אינווריאנטי

<u>הוכחה</u> יהי $v \in V_\lambda$, צ"ל $Tv \in V_\lambda$ כלומר ש$S(Tv) = \lambda Tv$

$$S(T(v)) = T(S(v)) = T(\lambda v)) = \lambda Tv$$

שאלה 4)

נראה שסכום ישר של המרחבים העצמיים מקיים זאת. נמצא ערכים עצמיים,

ניקח בסיס סטנדרטי $E = \{1, x, ..., x^n\}$ ואז $T = p + p(0)(1+x) + p'(0)x + p''(0)x^2$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & & \\ . & . & . & . & & & . & \\ . & . & . & . & & & & . \end{pmatrix}$$

וכעת $p_T(x) = (x-2)^2(x-3)(x-1)^{n-3}$

כלומר

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

כעת לכל $\lambda_i \in \sigma(T)$ מתקיים כי $[T|_{V_{\lambda_i}}]_E = \lambda I$ אשר הפולינום המינימלי שלה הוא $(x - \lambda)$ וסיימנו.