אינפי 1 – תרגיל 9

1. תהי פונקציה ממשית $f(x)$ ויהי $-\infty \le L \le \infty$ (כלומר L מספר ממשי כלשהו, או אינסוף או מינוס אינסוף)
הוכח: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם"ם הגבולות החד צדדים קיימים ושווים ל L (כלומר $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$)

2. מצא את הגבולות הבאים:
   a. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   b. $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)$
   c. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$
   d. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right]$
   e. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+10}{x-5}$
   f. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5}$
   g. $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{3x^7}}$

3. הוכח/הפרך: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אזי $\lim_{x\to\infty}\left[f(2x)-f(x)\right] = 0$

4.
   a. תהיי פונקציה ממשית f כך ש $f(x) = -f(-x)$ לכל $x \ne 0$. נתון ש f רציפה באפס. הוכח ש $f(0) = 0$.
   b. תן דוגמא לפונקציה כזו, וודא שאכן היא מתאפסת באפס.

5. נניח ו $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, ונניח ש g רציפה ב a. הוכח $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(a)$ (רמז: האפסילון בהגדרת הגבול לפי קושי של הגבול של f הופך להיות הדלתא של הגדרת הגבול לפי קושי של $g(f(x))$).

6. מיין את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות: (רמז בדף הבא)
   a. $\sin(\ln x^2)$
   b. $\sin(\frac{1}{\ln x^2})$
   c. $\frac{5x+4}{|5x+4|}$
   d. $e^{-\frac{1}{\sin x}}$
   e. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$

רמז לתרגיל 6: על מנת להוכיח שאין לפונקציה f גבול בנקודה a מספיק למצוא שתי סדרות $a \neq x_n, y_n \to a$ כך שאחד הגבולות $\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ אינו קיים או שהגבולות הנ"ל שונים.

<u>דוגמא</u>: הוכח שלפונקציה הבאה אין גבול בנקודה 0: $f(x)=\cos\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)$

פתרון: יש למצוא שתי סדרות $0 \neq x_n, y_n \to 0$ כמו שמצויין למעלה. יהיה הכי קל למצוא סדרות כך ש $f(x_n), f(y_n)$ קבועים שונים ללא תלות ב n.

למשל נרצה ש $f(x_n)=1,\ f(y_n)=-1$

אנו יודעים ש $\cos(2\pi n)=1, \cos(\pi+2\pi n)=-1$.

לכן אנחנו רוצים $\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)}=2\pi n$

לכן רוצים $\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)=(2\pi n)^2$

לכן $\frac{1}{|x_n|}=e^{(2\pi n)^2}$

ולבסוף $x_n=\frac{1}{e^{(2\pi n)^2}}$. קל לוודא ש $0 \neq x_n \to 0$

באופן דומה $y_n=\frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}$ ו $0 \neq y_n \to 0$

ולכן לפי הבנייה,
$$f(x_n)=1\to 1$$
$$f(y_n)=-1\to -1$$

ולכן לפי היינה אין גבול בנקודה.