אינפי 3 תרגיל 3 לתיכוניסטים - פתרונות

1. היות ו f רציפה על קבוצה קומפקטית אנחנו יודעים שלפונקציה f קיים מינימום ב E. נסמן את ערך המינימום ב M. לכן קיים $x_0 \in E$ כך ש $f(x_0) = M$ ולכל $x \in E$ מתקיים כי $f(x) \geq M$. כמו כן, ברור ש

$$f(x,y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} \geq 0$$

נניח שקיימים x, y עבורם

$$f(x,y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

זה בהכרח אומר ש

$$x^2 = 0 \quad \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

אבל זה מכריח ש $x = 0$ ובמצב זה

$$\cos^2 e^{\frac{x}{y}} = \cos^2 1 \neq 0$$

לכן לא קיימים x, y עבורם $f(x,y) = 0$ ולכן בהכרח $f(x,y) > 0$. מכאן ברור ש $f(x_0) = M > 0$ ולכן M מקיים את הדרוש.

2.

(א) מסתבר שבשאלה הזאת יש טעות.אחד הסטודנטים הראה לי את הדוגמא הבאה: ניקח את התחום $D = [-1,1] \times [-1,1]$. ונגדיר

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{|x|} & |y| \leq |x| \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{|x|}{|y|} & |x| < |y| \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

אם נחזיק את $x = x_0$ קבוע. נקבל שהפונקציה $f(x_0, y)$ רציפה. בגלל שהיא מוגדרת על תחום סגור היא גם רציפה במידה שווה. אם נחזיק את $y = y_0$ קבוע נקבל שלכל y_0 הפונקציה $f(x, y_0)$ היא רציפה על תחום סגור ולכן רציפה במידה שווה. אבל $f(x,y)$ לא רציפה ב $(0,0)$ כי התקדמות על ציר y תתן ש

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$$

והתקדמות על הישר $x = y$ תתן לנו ש

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 1$$

(ב)

i. לא. נבחר את הסדרה $a_n = (\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}}, 0)$ ואת הסדרה $b_n = (\sqrt{1-\frac{1}{\pi(n+1)}}, 0)$.
ברור ש $a_n, b_n \in D_1$ ו

$$a_n \to (1,0) \quad b_n \to (1,0)$$

ולכן ממילא

$$||a_n - b_n|| \to 0$$

אבל

$$f(a_n) = \cos \pi n \quad f(b_n) = \cos \pi(n+1)$$

ולכן

$$||f(a_n) - f(b_n)|| = ||\cos \pi n - \cos \pi(n+1)|| = ||(-1)^n 2|| = 2$$

ולכן הפונקציה לא מתכנסת במידה שווה על תחום זה.

ii. כן. נרחיב את תחום ההגדרה לתחום ההגדרה

$$\{(x,y) \mid 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

זוהי קבוצה סגורה וחסומה ו f רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במידה שווה עליו. ממילא f רציפה במידה שווה על D_2.

3. יהי $\epsilon > 0$. היות ו f רציפה במידה שווה ידוע כי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in D_f$

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

כמו כן, היות ו g רציפה במידה שווה על D_g ידוע כי קיים $\gamma > 0$ כך שעבור $x, y \in D_g$

$$||x - y|| < \gamma \Rightarrow ||g(x) - g(y)|| < \delta$$

קיבלנו אם כן, שעבור כל $x, y \in D_g$ מתקיים כי

$$||x - y|| < \gamma \Rightarrow ||g(x) - g(y)|| < \delta$$

אבל היות ו $g(x), g(y) \in D_f$ מתקיים לפי הרציפות במידה שווה של f ש:

$$||f(g(x)) - f(g(y))|| < \epsilon$$

וזה מוכיח לפי הגדרה ש fg רציפה במידה שווה על D_g.

4.

(א) הפרכה. ניקח

$$f(x,y) = y$$

$$a = (1,0) \quad b = (-1,0)$$

$$\gamma_1(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t), \quad \gamma_1(t) = (\cos\pi t, -\sin\pi t)$$

מסילות אלה מקיימות את כל מה שנדרש בשאלה אבל אם $t \in (0,1)$ נקבל כי

$$f(\gamma_1(t)) = \sin\pi t > 0 > -\sin\pi t = f(\gamma_2(t))$$

(ב) הוכחה: ראשית, ברור כי אם $f(a) = f(b)$ אז הטענה נכונה כי

$$f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(b) = f(\gamma_2(0))$$

לכן ניתן להניח $f(a) \neq f(b)$ בלי הגבלת כלליות $f(b) > f(a)$. נגדיר

$$g(t) = f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))$$

מתקיים כי

$$g(0) = f(a) - f(b) < 0$$

ו

$$g(1) = f(b) - f(a) > 0$$

בנוסף, g רציפה (כהרכבת רציפות). ולכן, לפי משפט ערך הביניים (של אינפי 1) קיים t_0 כך ש

$$g(t_0) = 0$$

שזה אומר

$$f(\gamma_1(t_0)) = f(\gamma_2(t_0))$$

.5

(א) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y) = 3x^2 - \frac{1}{y}$$

מוגדרת בכל נקודה שבה f מוגדרת כלומר כל נקודה שבה $y \neq 0$.

ii. נגזרת לפי y:

$$f_y^{'}(x,y) = 6y + \frac{x}{y^2}$$

גם כן מוגדרת בכל נקודה שבה $y \neq 0$.

ב) $f(x,y)=e^{\cos(xy)}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y)=e^{\cos(xy)}\sin(xy)y$$

ii. ובאופן סימטרי נגזרת לפי y היא

$$f_y^{'}(x,y)=e^{\cos(xy)}\sin(xy)x$$

שתיהן מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

ג) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y,z)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ii. באופן סימטרי הנגזרות לפי y,z הן:

$$f_y^{'}(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_z^{'}(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

כל הנגזרות מוגדרות ב $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$.

ד) $f(x,y,z)=ln(x^3+y^3-z^3)$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y,z)=\frac{1}{x^3+y^3-z^3}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ii. בדומה

$$f_y^{'}(x,y,z)=\frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3},\quad f_z^{'}(x,y,z)=\frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3}$$

כל הנגזרות מוגדרות בנקודות שבהן $x^3+y^3-z^3>0$.

.6

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

יש להפריד בין הנגזרת ב $(0,0)$ לנגזרת במקומות אחרים. בכל נקודה שהיא לא $(0,0)$:

$$f_x^{'}(x,y)=\frac{4xy(x^2+y^2)-2x(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x^3y+4xy^3-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{2x^2(x^2+y^2) - 2y(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נקבל:

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

לכן הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

כעת נותר לבדוק את רציפותן ב $(0,0)$. עבור $f_x^{'}$ נוכל להתקדם על ישר $x = y$. ולקבל

$$\lim_{x\to 0} f_x^{'}(x,x) = \frac{4x^4}{(2x^2)^2} = 1 \neq 0$$

ולכן $f_x^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$. עבור $f_y^{'}$ נתקדם על הישר $y = 0$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0} f_y^{'}(x,0) = \frac{2x^4}{(x^2)^2} = 2 \neq 0$$

ולכן גם $f_y^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$.