קורס: 88-133-01,05,07

מרצים: ד"ר א. שיינר, ד"ר מ. שיין, ד"ר ש. הורוביץ

ח' אלול תשע"ה

# מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 2

# מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. אתם חייבים לנמק כל תשובה. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. חשבו: א. $\int \frac{1}{x^3+2x^2+5x}dx$

פתרון:

$$\frac{1}{x^3+2x^2+5x}=\frac{1}{x(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}=\frac{A\left(x^2+2x+5\right)+x\left(Bx+C\right)}{x^3+2x^2+5x}$$

לכן $A\left(x^2+2x+5\right)+x\left(Bx+C\right)=1$. ע"י הצבת $x=0$ נקבל כי $5A=1$ ולכן $A=\frac{1}{5}$.

ע"י הצבת $x=1,-1$ נקבל

$$\begin{cases} B+C=-\frac{3}{5} \\ B-C=\frac{1}{5} \end{cases}$$

ולכן סה"כ $A=\frac{1}{5},B=-\frac{1}{5},C=-\frac{2}{5}$ כלומר $\frac{1}{x^3+2x^2+5x}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x^2+2x+5}\right]$.

לכן

$$\int\frac{1}{x^3+2x^2+5x}dx=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

כעת

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$$

כעת

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix} t=\frac{x+1}{2} \\ dt=\frac{1}{2}dx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{4}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\arctan(t)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

סה"כ **תשובה סופית:**

$$\int\frac{1}{x^3+2x^2+5x}dx=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

ב. $\int \frac{1}{e^x-2-3e^{-x}}dx$

פתרון:

$$\int \frac{1}{e^x-2-3e^{-x}}dx=\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x-3}dx=\left\{\begin{matrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{matrix}\right\}=\int \frac{1}{t^2-2t-3}dt=\int \frac{1}{(t-3)(t+1)}dt$$

כעת

$\frac{1}{(t-3)(t+1)}=\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+B(t-3)}{(t-3)(t+1)}$ לכן $A(t+1)+B(t-3)=1$ .

נציב $t=3,-1$ ונקבל $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}$

כעת

$$\int \frac{1}{(t-3)(t+1)}dt=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+1}\right]dt=\frac{1}{4}\ln|t-3|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+C$$

סה"כ **תשובה סופית**

$$\int \frac{1}{e^x-2-3e^{-x}}dx=\frac{1}{4}\ln\left|e^x-3\right|-\frac{1}{4}\ln\left|e^x+1\right|+C$$

2. קבעו אם כל אינטגרל מתכנס או מתבדר:

א. $\int_1^\infty \frac{1}{x+(\ln x)^2}dx$

פתרון:

נבצע מבחן השוואה גבולי עם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ ונראה כי הם חברים. כיוון שאינטגרל זה מתבדר, גם האינטגרל המקורי מתבדר.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+(\ln x)^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+(\ln x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{(\ln x)^2}{x}}=1$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}\overset{L'\text{hopital}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{L'\text{hopital}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0$$

ב. $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x - \cos x}{x}dx$

פתרון:

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x}$$

הקדומה של $\cos(2x)$ הינה $\frac{1}{2}\sin(2x)$ והיא חסומה, וכמו כן הקדומה של $\cos x$ היא הפונקציה החסומה $\sin x$. כיוון ש $\frac{1}{x}$ מונוטונית שואפת לאפס, לפי **משפט דיריכלה** האינטגרלים $\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}$ מתכנסים.

אך האינטגרל $\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x}$ מתבדר וסה"כ סכום של אינטגרל מתכנס ועוד אינטגרל מתבדר הוא **מתבדר.**

לכן **התשובה הסופית** היא ש $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x - \cos x}{x}dx$ מתבדר.

3. להוכיח או להפריך: אם $f_n \to f$ נקודתית ב-$[0,1]$ ובמ"ש ב- $(0,1)$ אז $f_n \to f$ במ"ש ב-$[0,1]$.

הוכחה:

לפי הנתון שהסדרה מתכנסת נקודתית בקטע הסגור ניתן להסיק כי $f_n(0) \to f(0), f_n(1) \to f(1)$. כיוון שהסדרה מתכנסת במ"ש ב- $(0,1)$, ניתן להסיק כי $\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

כעת

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\left\{\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(0) - f(0)|, |f_n(1) - f(1)|\right\}$$

כיוון ששלושת הסדרות שואפות לאפס, גם $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ ולכן הסדרה מתכנסת במ"ש ב-$[0,1]$.

4. תהי $f(x)\geq 0$ פונקציה רציפה אבל לא חסומה בקטע $(0,1]$ כך שהאינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס. הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של $[0,1]$ כך שהסכום התחתון של דרבו $\underline{S}(f,P)$ מקיים $\int_0^1 f(x)dx \ -\varepsilon<\underline{S}(f,P)<\int_0^1 f(x)dx$.

הוכחה:

יהי $\varepsilon<0$.

ראשית, כיוון ש $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס, נובע לפי ההגדרה כי $\int_0^1 f(x)dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 f(x)dx$. לכן עבור $\frac{\varepsilon}{2}$ קיימת $\delta>0$ עבורה לכל $0<t<\delta$ מתקיים כי

$$\int_0^1 f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<\int_t^1 f(x)dx<\int_0^1 f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

בפרט עבור $t=\frac{\delta}{2}$ נקבל $\int_0^1 f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx$ ולכן $\int_0^{\frac{\delta}{2}} f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת:

$$\int_0^1 f(x)dx-\varepsilon=\int_0^{\frac{\delta}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx-\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}+\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx-\varepsilon=\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}$$

אבל בקטע $\left[\frac{\delta}{2},1\right]$ הפונקציה $f(x)$ רציפה (בקטע סגור) ולכן אינטגרבילית. לכן קיימת חלוקה $Q$ של הקטע $\left[\frac{\delta}{2},1\right]$ עבורה $\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(f,Q)$. כיוון שהפונקציה $f(x)$ אי שלילית, וודאי אם נרחיב את החלוקה $Q$ לחלוקה $P=Q\cup\{0\}$ של הקטע $[0,1]$ מתקיים $\underline{S}(f,Q)\leq\underline{S}(f,P)$ (כי הוספנו גודל אי שלילי).

סה"כ קיבלנו עד כה חלוקה עבורה $\int_0^1 f(x)dx-\varepsilon<\underline{S}(f,P)$.

מצד שני, לפי ההגדרה של אינטגרביליות לפי דרבו, $\underline{S}(f,Q)\leq\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx$. אם נוכיח כי

$$\frac{\delta}{2}\left(\min_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)<\int_0^{\frac{\delta}{2}} f(x)dx$$ ינבע כי

$$\underline{S}(f,P)=\underline{S}(f,Q)+\frac{\delta}{2}\left(\min_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)<\int_0^{\frac{\delta}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\delta}{2}}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$ ואז סיימנו את ההוכחה.

אכן, כיוון ש $f(x)$ אינה חסומה, קיימת נקודה $0<x_0<\frac{\delta}{2}$ עבורה $f(x_0)>\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)$

כיוון שהפונקציה $f(x)$ רציפה, נובע כי קיימת סביבה של $x_0$ בה

$f(x)>\frac{f(x_0)+\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)}{2}$ (הגובה בחצי הדרך בין $f(x_0),\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)$ )

לכן בסביבה זו, האינטגרל על $f(x)-\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)$ גדול ממש מאפס, ולכן סה"כ

$\int_0^{\frac{\delta}{2}}\left[f(x)-\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)\right]dx>0$ וסה"כ קיבלנו בדיוק כי $\int_0^{\frac{\delta}{2}} f(x)dx<\frac{\delta}{2}\left(\min\limits_{x\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} f(x)\right)$ כפי שרצינו.

5. נניח ש- $f(x)$ היא פונקציה רציפה ובעלת מחזור $2\pi$ ב- $\mathbb{R}$ . עוד נניח שטור פוריה הפורמלי של $f(x)$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$ (ובפרט כל $a_n=0$ . ) לכל $x\in\mathbb{R}$

נגדיר $F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$ . הוכיחו:

א. $F(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=0$ .

פתרון:

לפי ההגדרה $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ אבל לפי הנתון $a_0=0$ ולכן $F(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=0$

ב. $F(x)$ רציפה ובעלת מחזור $2\pi$ ב- $\mathbb{R}$.

פתרון:

ראשית, לפי המשפט היסודי של החדו"א, כיוון ש $f(x)$ רציפה נובע ש $F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$ היא פונקציה קדומה לה, ובפרט רציפה. נותר להוכיח כי היא בעלת מחזור $2\pi$.

כלומר, צריך להוכיח כי לכל $x$ מתקיים $F(x)=F(x+2\pi)$ . נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=F(x)-F(x+2\pi)$.

נגזור את הפונקציה ונקבל $h'(x)=f(x)-f(x+2\pi)=0$ (נתון כי $f(x)$ בעלת מחזור $2\pi$.

לכן $h(x)$ פונקציה קבועה.

נציב $-\pi$ ונקבל $h(-\pi)=F(-\pi)-F(\pi)=0-0=0$, ולכן $h(x)=0$ לכל $x$, כלומר $F(x)=F(x+2\pi)$ כפי שרצינו.

ג. טור פוריה הפורמלי של $F(x)$ הוא $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n}{n}\cos(nx)$ עבור איזה קבוע $a_0$.

פתרון:

נחשב את מקדמי הפוריה $A_n, B_n$ של הפונקציה $F(x)$:

עבור $n\neq 0$,

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(nx)dx=\left\{\begin{matrix} u'=\sin(nx), v=F(x) \\ u=-\frac{1}{n}\cos(nx), v'=f(x)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\cos(nx)dx$$

$\frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=0$ כיוון ש $F(\pi)=F(-\pi)=0$.

כמו כן, $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\cos(nx)dx=a_n=0$ לכן סה"כ $B_n=0$ לכל $n$

(גם עבור $n=0$, $\sin(0\cdot x)=0$).

כעת, עבור $n\neq 0$,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos(nx)dx=\left\{\begin{matrix} u'=\cos(nx), v=F(x) \\ u=\frac{1}{n}\sin(nx), v'=f(x)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\sin(nx)dx=$$

$$=-\frac{b_n}{n}$$

וכמובן ש $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx$ (אין צורך לחשב אותו עבור התרגיל), וקיבלנו שטור הפורייה הפורמלי הוא אכן $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n}{n}\cos(nx)$.

6. חשבו את $\sqrt[4]{18}$ בדיוק של $10^{-3}$ בעזרת פיתוח טיילור סופי. הצדיקו את תשובתכם ע"י הערכת השארית בפיתוח.

פתרון:

נפתח את הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב הנקודה $a=16$ ונקרב אותה בנקודה $x=18$ באמצעות פולינום טיילור.

לכל $n$ קיימת $16<c<18$ כך שהשארית בין $\sqrt[4]{18}$ לקירובו על ידי פולינום טיילור מסדר $n$ לפי לגראנז' היא $\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(18-16)^{n+1}$.

עלינו לבחור $n$ עבורו השארית בערך מוחלט קטנה מ $10^{-3}$. ננסה מספר ערכי $n$ עד שנגיע למטרתנו.

למשל עבור $n=2$ אנו מקבלים כי השארית הינה

$$\left|\frac{f^{3}(c)}{3!}2^{3}\right|=\left|\frac{3\cdot 7}{3!4^{3}c^{\frac{11}{4}}}2^{3}\right|\le\left|\frac{3\cdot 7}{3!4^{3}16^{\frac{11}{4}}}2^{3}\right|=0.00021...<10^{-3}$$

ולכן הקירוב הוא פולינום טיילור מסדר 2:

$$P_2(18)=f(16)+f'(16)(18-16)+\frac{f''(16)}{2!}(18-16)^2=\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}}\cdot 2-\frac{1}{2}\frac{3}{16}16^{-\frac{7}{4}}\cdot 2^2=$$

$$=2+\frac{1}{4}2^{-2}-\frac{1}{2}\frac{3}{16}2^{-5}=2.059...$$