

תורת המשחקים - שיעור 2

משחקים בצורה אסטרטגית

משחקים בצורה אסטרטגית

- ▶ נזכר במושג **משחק בצורה אסטרטגית** (game in strategic form) שפגשנו בשיעור הקודם.
- ▶ הצגנו משחקים כגון:

סטודנט 2

		A	B
סטודנט 1	A	60,60	100,50
	B	50,100	80,80

הרכיבים למשחק בצורה אסטרטגית:

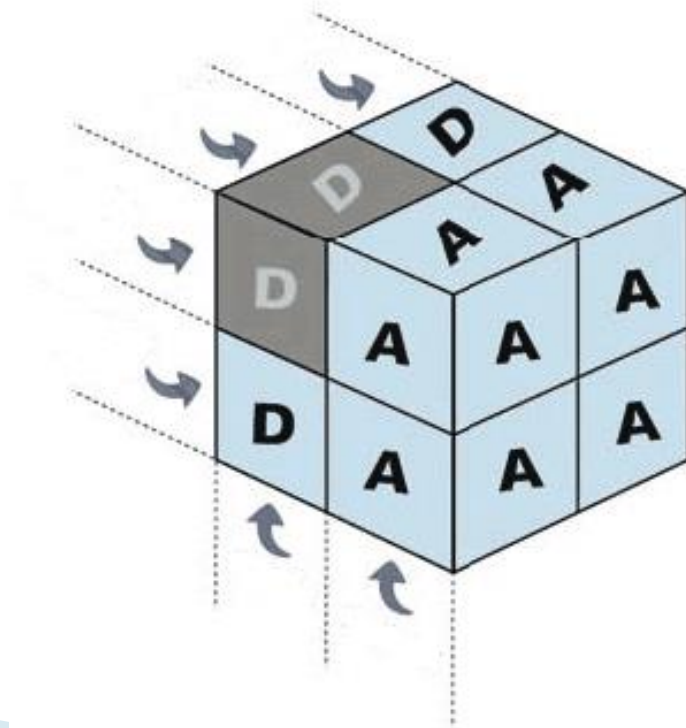
- ▶ יש לנו **שחקנים** אשר צריכים לקבל החלטות, החלטות אלה ייקראו **אסטרטגיות**.
- ▶ צירוף מסוים של אסטרטגיות, לדוגמא (A, B) קובע את **תוצאת המשחק** לכל אחד מהשחקנים (כלומר שחקנים שונים יכולים לקבל תוצאות שונות מאותו צירוף אסטרטגיות).
- ▶ כל שחקן מייחס לתוצאה ערך הנקרא **תועלת** או **תשלום** שבעזרתו נוכל לקבוע את העדפתו לתוצאות.

משחק בצורה אסטרטגית - הגדרה

- ▶ נסמן ב $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ את קבוצת השחקנים.
- ▶ לכל שחקן $i \in N$ נסמן ב S_i את קבוצת האסטרטגיות של השחקן i .
נסמן אסטרטגיה ספציפית $s_i \in S_i$.
- ▶ **וקטור אסטרטגיות** הוא $s = (s_1, \dots, s_n)$.
- ▶ נסמן ב S את קבוצת כל **וקטורי האסטרטגיות**.
כלומר $S = \prod S_i = \{(s_1, \dots, s_n) : s_i \in S_i\}$.
- ▶ לכל שחקן $i \in N$ נסמן ב $u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ את **פונקציית התועלת** של השחקן.
(שימו לב: דילגנו על שלב התוצאות, מבחינה מתמטית הוא אינו מעניין).
- ▶ סה"כ: **משחק בצורה אסטרטגית** הוא שלשה $G = (N, (S_i), (u_i))$.

ייצוג בעזרת מטריצה

- ניתן לייצג משחק בין שני שחקנים ע"י מטריצה דו-מימדית, אך משחק בין מספר גדול יותר של שחקנים יש לתאר ע"י מטריצה רב-ממדית.



סימונים

- ▶ הגדרנו את S_i להיות קבוצת האסטרטגיות של שחקן i ,
נגדיר S_{-i} להיות קבוצת וקטורי האסטרטגיות של כל
השחקנים פרט לשחקן i :

$$S_{-i} = \{(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)\}$$

- ▶ נסמן ב $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ וקטור אחד כנ"ל.

אסטרטגיה שולטת חזק

אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת **אסטרטגיה שולטת חזק** אם לכל אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$

דוגמה: דילמת האסיר

אסיר 2

מלשין

שותק

אסיר 1

מלשין

שותק

6,6	0,10
10,0	1,1

תרגום לפונקציות
תועלת



אסיר 2

מלשין

שותק

אסיר 1

מלשין

שותק

1,1	5,0
0,5	4,4

אסטרטגיה נשלטת חזק

▶ אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת **אסטרטגיה נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ כך שלכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

▶ **שימו לב:** ישנו חוסר סימטריה בין ההגדרות שולטת חזק ונשלטת חזק.

שולטת חזק = זו האסטרטגיה הטובה ביותר
נשלטת חזק = קיימת אסטרטגיה טובה יותר

הערות

▶ אם יש אסטרטגיה שולטת חזק אזי כל אסטרטגיה אחרת היא נשלטת חזק.

▶ ייתכן שאין אסטרטגיה שולטת חזק אך יש אסטרטגיה נשלטת חזק.

		שחקן 2		
		L	C	R
שחקן 1	T	1,2	2,3	1,2
	B	2,2	2,0	1,-1

הנחות רציונליות

- ▶ **הנחה 1:** שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק ויעדיף לבחור באסטרטגיה שולטת חזק.
- ▶ **הנחה 2:** כל השחקנים במשחק הם רציונליים.

דוגמה: חניבעל תוקף את רומא

- ▶ חניבעל צריך לבחור בין מסלול החוף (קל למעבר) למסלול ההרים (קשה למעבר).
- ▶ לחניבעל יש שני גדודים.
- ▶ אם הוא בוחר במסלול הקשה הוא מאבד גדוד אחד.
- ▶ לרומא אין מספיק כוחות בשביל להגן על שני המסלולים, ובנוסף היא מסוגלת להרוג רק גדוד אחד של חניבעל.

חניבעל – מטריצת המשחק

- ▶ פונקצית התועלת של רומא u_1 סופרת כמה גדודים נהרגו לחניבעל.
- ▶ פונקצית התועלת של חניבעל u_2 סופרת כמה גדודים שרדו לחניבעל.

		חניבעל	
		חוף	הרים
רומא	חוף	1,1	1,1
	הרים	0,2	2,0

ניתוח המשחק – מזווית הראייה של רומא

- ▶ לרומא אין אסטרטגיה שולטת חזק.
- ▶ על רומא אם כן לנתח את האסטרטגיה מזווית הראיה של חניבעל.
- ▶ אם רומא בוחרת בחוף, אז אין חשיבות בבחירת האסטרטגיה של חניבעל.
- ▶ אם רומא בוחרת בהרים, עדיף על חניבעל לבחור בחוף.
- ▶ אם כן בשקלול שתי הטענות הנ"ל עדיף על חניבעל לבחור בחוף, למרות שזו לא האסטרטגיה השולטת חזק.
- ▶ אם כך עדיף גם על רומא לבחור בחוף.

אסטרטגיה שולטת חלש

▶ אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת **אסטרטגיה שולטת חלש** אם לכל אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(t_i, s_{-i})$$

וקיים לפחות צירוף אסטרטגיות אחד $t_{-i} \in S_{-i}$ של השחקנים האחרים שעבורו

$$u_i(s_i, t_{-i}) > u_i(t_i, t_{-i})$$

דוגמה:

- ראינו שבמשחק של חניבעל מתקיים שעבור חניבעל אסטרטגית החוף היא אסטרטגיה שולטת חלש

		חניבעל	
		חוף	הרים
אומא	חוף	1,1	1,1
	הרים	0,2	2,0

שאלה?

- ▶ האם יכולות להיות לשחקן 2 אסטרטגיות שונות ששולטות חלש?
תשובה: לא!
- ▶ הוכחה: יהיו $s_i, t_i \in S_i$ שתי אסטרטגיות שולטות חלש. אזי לפי הגדרה קיים צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ כך ש
$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$
סתירה לכך ש t_i שולטת חלש.

אסטרטגיה נשלטת חלש

אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת **אסטרטגיה נשלטת חלש** אם קיימת אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i$ כך שלכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(t_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

ובנוסף קיים לפחות צירוף אחד $s_{-i} \in S_{-i}$ כך ש

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

מושג הפתרון במשחק בצורה אסטרטגית

▶ הגדרה: אם לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שולטת חזק, צירוף אסטרטגיות אלה נקרא **פתרון המשחק באסטרטגיות שולטות חזק**.

▶ הגדרה: אם לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שולטת חלש, צירוף אסטרטגיות אלה נקרא **פתרון המשחק באסטרטגיות שולטות חלש**.

סילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק

- ▶ אם שני השחקנים הם רציונליים, היינו רוצים למחוק אסטרטגיות נשלטות חזק מהמטריצה (כיוון שאף שחקן לא ייבחר באופציה כזו).
- ▶ לאחר המחיקה ניתן לנתח את המטריצה שוב, ולבדוק האם יש עדיין אסטרטגיות נשלטות חזק.
- ▶ ייתכן שאסטרטגיה שאינה נשלטת חזק תהפוך לשכזו לאחר מחיקה של אסטרטגיה אחרת.

דוגמה 1

שחקן 2

שחקן 1

	L	C	R
T	1,0	1,2	0,1
M	0,3	0,1	2,0
B	-1,2	-2,0	-1,-1

דוגמה 2

		שחקן 2		
		L	C	R
שחקן 1	T	1,2	2,3	1,2
	B	2,2	2,0	1,-1

▶ מסקנה: לא כל תהליך מחיקת שורות מסתיים במשבצת אחת.

ידיעה משותפת של רציונליות

- ▶ למעשה לא ניתן סתם כך למחוק אסטרטגיות נשלטות חזק. יש לקבל הנחות מסוימות לגבי השחקנים.
- ▶ הרי כדי למחוק את השורה, צריכה להיות וודאות שכל השחקנים יודעים שהאסטרטגיה אינה רלוונטית.
- ▶ כלומר אם האסטרטגיה הנשלטת חזק היא של שחקן 1, אזי כדי למחוק אותה צריך ששחקן 1 יהיה רציונלי, וששחקן 2 ידע ששחקן 1 רציונלי.
- ▶ אך למעשה צריך יותר מזה, שחקן 1 צריך לדעת ששחקן 2 יודע ששחקן 1 הוא רציונלי.
- ▶ וגם זה אינו מספיק.... צריך להמשיך את השרשרת עד אינסוף.

הנסיכה הקסומה: ויזיני מול האיש במסכה

▶ <http://www.youtube.com/watch?v=0sPVEBAAtwmg>

▶ ויזיני מנסה להעריך את הרציונליות של האיש במסכה, אך האם יש לכך בכלל משמעות? נסו לנתח את המטריצה של המשחק.

סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק

משפט: סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק אינו רלוונטי. כלומר אם נמחק אסטרטגיות נשלטות חזק עד שלא תיוותר אסטרטגיה נשלטת חזק, קבוצת האסטרטגיות הנמחקות אינה תלויה בסדר המחיקה.

הוכחה:

▶ אם לאחר סדרת מחיקות $s_{i_1,1}, \dots, s_{i_n,n}$, האסטרטגיה $s_i \in S_i$ נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_i אזי s_i ממשיכה להיות נשלטת חזק (לאו דוקא ע"י t_i) כל עוד s_i לא נמחקה.

אכן, אם בשלב כלשהו מחקנו את האסטרטגיה t_i זה משום שהיא נשלטת על ידי אסטרטגיה r_i . ברור ש r_i שולטת כרגע על s_i .

▶ כמו כן, אם s_i נשלטת חזק לאחר סדרת מחיקות $s_{i_1,1}, \dots, s_{i_n,n}$, אזי היא נשלטת חזק אחרי סדרת המחיקות $s_{i_0,0}, s_{i_1,1}, \dots, s_{i_n,n}$ לכל $s_i \neq s_{i_0,0}$.

אכן, אם $t_i \neq s_{i_0,0}$ אזי s_i עדיין תשלט על ידי t_i , ואם $t_i = s_{i_0,0}$ אז קיימת אסטרטגיה r_i ששולטת על t_i ולכן על s_i לאחר סדרת המחיקות.

▶ המשך בעמוד הבא...

המשך הוכחת סילוק

- ▶ תהיינה $t_{j_1,1}, \dots, t_{j_k,k} \mid s_{i_1,1}, \dots, s_{i_n,n}$ סדרות סילוק אסטרטגיות נשלטות חזק, כך שלא נשארות אסטרטגיות לסלק אחריהן.
- ▶ כיוון ש $s_{i_1,1}$ נשלטת חזק במשחק המקורי, היא נשלטת חזק לאחר כל מחיקה שנבצע.
- ▶ לכן, אם $s_{i_1,1}$ אינה מופיעה בסדרה השנייה, ניתן להוסיף אותה בסופה, בסתירה.
- ▶ ניתן להזיז את $s_{i_1,1}$ לתחילת הסדרה השנייה מבלי לפגוע באסטרטגיות שלפניה (לפי העמוד הקודם). כמובן שהאסטרטגיות שאחריה לא יפגעו כיוון שקבוצת האסטרטגיות שנמחקו לפניהן לא השתנתה.
- ▶ לכן ניתן להניח שאנו משחקים במשחק המקורי ללא האסטרטגיה $s_{i_1,1}$, עם שתי סדרות המחיקה $t_{j_2,2}, \dots, t_{j_k,k} \mid s_{i_2,2}, \dots, s_{i_n,n}$.
- ▶ נמשיך כך, עד שנוכיח ששתי הסדרות מכילות בדיוק אותן אסטרטגיות. הערה: אם אורך הסדרות שונה, נגיע לסתירה כאשר אחרי אותן האסטרטגיות בדיוק בסדרה אחת נוכל למחוק עוד אסטרטגיות, אך בשנייה לא.

סילוק של אסטרטגיות בשלטות חלש

שחקן 2

		L	C	R
שחקן 1	T	1,2	2,3	0,3
	M	2,2	2,1	3,2
	B	2,1	0,0	1,0

סילוק בסדרה אחרת

שחקן 2

	L	C	R
T	1,2	2,3	0,3
M	2,2	2,1	3,2
B	2,1	0,0	1,0

שחקן 1

מסקנה: התוצאה המתקבלת ע"י סילוק אסטרטגיות נשלטות חלש תלויה בסדר הסילוק!