

מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ב מועד ג'

29.9.2022

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייג, ארז שיינר.
מתרגלים: שחר חנניה, נעה כהן, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד,
אושרית שטוסל.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (24 נק') יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן בתת-המרחב

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ -a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ -a \\ -a-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^4$$

ובוקטור

$$.v = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

(א) קבעו לכל ערך של הפרמטר a מהו המימד של U (מעל שדה הממשיים).

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a האם $v \in U$.

(ג) עבור $a = 1$, מצאו בסיס B עבור U , וחשבו את $[v]_B$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

2. (24 נק') תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ונניח שקיימים שני בסיסים סדורים $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ו- $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ של \mathbb{R}^3 שעבורם

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ומימד ל- $N([T]_C^B)$ ול- $C([T]_C^B)$ (מרחב האפס ומרחב העמודות של $[T]_C^B$).

(ב) הביעו באמצעות איברי B ו- C בסיסים לגרעין ולתמונה של T .

(ג) נתון בסיס $D = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\}$ של \mathbb{R}^3 (אין צורך להוכיח ש- D בסיס). מצאו את $[T]_C^D$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

3. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה \mathbb{F} , ויהיו U, W תת-מרחבים של V .
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם $\dim U + \dim W = \dim V + 1$, אז $U + W = V$.

(ב) אם $U \cap W = \{0_V\}$, אז קיים תת-מרחב W_1 של V כך שמתקיים $W \subseteq W_1$ וגם $U \oplus W_1 = V$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

4. (20 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל \mathbb{F} , ותהינה $T, S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם $\ker T \cap \ker S = \{0_V\}$, אז $\text{Im} T \cap \text{Im} S = \{0_W\}$.

(ב) הוכיחו כי $\text{Im} T \subseteq \text{Im} S$ אם ורק אם קיימת העתקה לינארית $R: V \rightarrow V$ שעבורה $T = SR$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

5. (24 נק') תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. נסמן $k = \text{rank}(A)$.

(א) הוכיחו שאם $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה שעבורה $\text{rank}(B) < n - k$, אז $A + B$ אינה הפיכה.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $A \neq 0$ ואינה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מדרגה $n - k$ שעבורה $A + B$ אינה הפיכה.

(ג) הוכיחו שקיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מדרגה $n - k$ שעבורה $A + B$ הפיכה.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____