אלגברה מופשטת 3 – תרגול 8

דוגמה: בדיקת חבורת גלואה של פולינום מעל $\mathbb{Q}$ מדרגה 3 בעזרת אינפי: $f(x)=x^3+x^2+3x+1$. ידוע שחבורת גלואה של שדה הפיצול מעל $\mathbb{Q}$ היא $\mathbb{Z}_3$ או S_3, וכן שאם יש שורש מרוכב לפולינום, אזי החבורה היא S_3. אם כך צריך לבדוק כמה שורשים ממשיים יש לפולינום כדי לקבוע את החבורה.

טענות מאינפי:

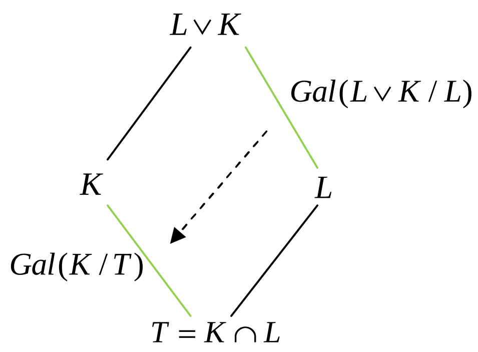
א. לפולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש ממשי (לפי משפט ערך הביניים).
ב. לפולינום שלנגזרתו אין שורשים ממשיים יש לכל היותר שורש אחד (לפי משפט רול).
ג. אם לפולינום ממעלה אי-זוגית יש נגזרת ללא שורשים ממשיים אזי יש לה בדיוק שורש אחד.

$f'(x)=3x^2+2x+3$, ולפי הדיסקרימיננטה הריבועית $\Delta=4-4\cdot 3\cdot 3=-32<0$ אין לנגזרת שורשים **ממשיים**, ולכן יש בהכרח שורשים מרוכבים לפולינום, ולכן החבורה היא S_3.

תרגיל: אם $F\subseteq L,K\subseteq E$, וגם $\sigma\in Gal(E/F)$ קובע את L,K אזי σ קובע את $L\vee K$.

פתרון: אם σ אינו קובע את $L\vee K$, אזי ניתן לקחת $E^{<\sigma>}\cap(L\vee K)\subset L\vee K$ ולקבל שדה קטן יותר המכיל את L,K, כיוון ש L,K נקבעים ע"י σ, בסתירה למינימליות $L\vee K$.

תרגיל:



$T=K\cap L\le K,L\le E$. נתון K/T הרחבת גלואה. הוכיחו ש $L\vee K/L$ היא הרחבת גלואה, וקיים איזומורפיזם $Gal(L\vee K/L)\to Gal(K/T)$.

פתרון:

K/T גלואה אם ורק אם K שדה פיצול של פולינום ספרבילי $f(x)\in T[x]$.

נסמן את שדה הפיצול של $f(x)$ מעל L ב S ונראה ש $S=L\vee K$.

מתקיים $K=T[\alpha_1,...,\alpha_n]$ כאשר $\alpha_1,...,\alpha_n$ הם שורשי $f(x)$.

בהכרח S מכיל את השורשים $\alpha_1,...,\alpha_n$, והוא מכיל את L, ולכן הוא מכיל את $T=L\cap K$. מכאן נקבל ש S מכיל את K, ולכן הוא מכיל גם את $L\vee K$. מצד שני $L\vee K$ הוא שדה מפצל של $f(x)$ מעל L כיוון שהוא מכיל את כל השורשים, ולכן בהכרח $S=L\vee K$.

נגדיר $\varphi: Gal(L\vee K/L)\to Gal(K/T)$ תחילה ע"י הכלה $Gal(L\vee K/L)\to Gal(L\vee K/T)$, ואז צמצום ל K (מותר לצמצם כיוון ש K/T הרחבת גלואה). ניתן לבדוק שזהו הומומורפיזם, והוא חח"ע כיוון שאם התמונה $\varphi(\sigma)$ של $\sigma\in Gal(L\vee K/L)$ היא הזהות, אזי $\varphi(\sigma)$ קובע את K, ולכן σ קובע גם את K וגם את L, ולכן קובע את $L\vee K$ (לפי התרגיל הקודם), כלומר הגרעין טריויאלי, ולכן ההעתקה היא חח"ע.

נראה שההעתקה היא על. נסמן $H=Gal(L\vee K/L)$. אזי מתקיים $K^{\varphi(H)}\subseteq K\cap L$: ברור שמתקיים $K^{\varphi(H)}\subseteq K$. בנוסף, כיוון שההעתקה היא צמצום חח"ע, נקבל שאם $a\in K$ מקיים $\varphi(\sigma)(a)=a$ לכל $\sigma\in H$, אזי מתקיים $a\in(L\vee K)$ וגם $\sigma(a)=a$ לכל $\sigma\in H$, ולכן $a\in(L\vee K)^H=L$. לכן $K^{\varphi(H)}\subseteq K\cap L$. מצד שני, כיוון ש $\varphi(H)\le Gal(K/T)$ אזי $K^{\varphi(H)}\supseteq K^G=K\cap L$. לכן $K^{\varphi(H)}=K\cap L$, ונקבל שבהכרח $\varphi(H)=G$, כנדרש.

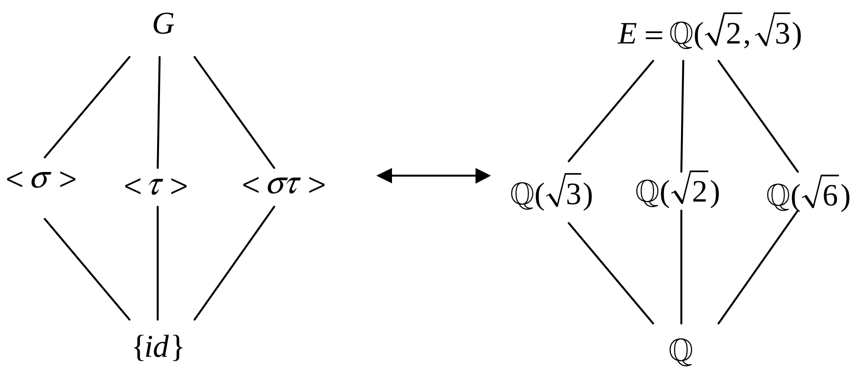
תרגיל: מצאו את חבורת גלואה וכל שדות הביניים של שדה הפיצול $E/\mathbb{Q}$ של הפולינום $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)$. ציינו אלו שדות ביניים הן הרחבות גלואה של $\mathbb{Q}$.

פתרון:

אנחנו זוכרים שחבורת גלואה $Gal(E/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ כאשר היוצרים של החבורה הם

$$\sigma:\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2},\sqrt{3}\mapsto\sqrt{3}$$
$$\tau:\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2},\sqrt{3}\mapsto-\sqrt{3}$$

כעת מספיק למצוא את כל התת-חבורות של $G=Gal(E/\mathbb{Q})$, והן $\{id\},<\sigma>,<\tau>,<\sigma\tau>,G$.



עבור השדה $E^{<\sigma\tau>}=\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ מחפשים איבר לא רציונלי שנקבע ע"י $\sigma\tau$, אבל איבר כזה הוא $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

תרגיל: כמו התרגיל הקודם, עבור $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$.

פתרון: ידוע שחבורת גלואה היא S_3 . נסמן את השורשים $\sqrt[3]{2},\rho_3\sqrt[3]{2},\rho_3^{\,2}\sqrt[3]{2}$ ב 1,2,3, בהתאמה.

ת"ח הן: הטריויאליות $S_3,\{(1)\}$.

קיימת ת"ח יחידה מסדר 3: $A_3=\{(1),(123),(132)\}$

ועוד 3 ת"ח מסדר 2: $<(12)>,<(13)>,<(23)>$.