

## שיעורי בית 5

4 בינואר 2016

1. הוכח/הפרך כי  $H$  היא ת"ח של  $G$  במקרים הבאים  
**פתרון:** זיכרו שבשביל להראות כי  $H \subseteq G$  תת חבורה צריך להראות ש

- איבר היחידה שייך ל  $H$  כלומר  $e \in H$
- לכל  $h_1, h_2 \in H$  מתקיים כי  $h_1 h_2^{-1} \in H$

$$H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G \quad (\text{א})$$

**פתרון:** ת"ח כי  $a+ai, b+bi \in H$  אזי  $(a+ai) - (b+bi) = a-b + (a-b)i \in H$   
 $(a=0)$  בנוסף איבר היחידה  $0 \in H$  (הוא מתקבל אם ניקח  $a=0$ )

$$H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G \quad (\text{ב})$$

**פתרון:** ת"ח כי  $mz_1, mz_2 \in H$  אזי  $mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in H$  בנוסף  
איבר היחידה  $0 \in H$  (הוא מתקבל עבור  $z=0$ )

$$H = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n \times n} = G \quad (\text{ג})$$

**פתרון:** לא ת"ח כי  $I, -I \in H$  אבל  $I - I = 0 \notin H$

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{ד})$$

תהא  $G$  חבורה ו  $n \in \mathbb{N}$ .  
**פתרון:** לא. למשל  $G = S_3$ . ו  $n = 3$  אזי  $H = \{id, (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$   
אינה ת"ח כי אין סגירות.

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{ה})$$

תהא  $G$  חבורה חילופית ו  $n \in \mathbb{Z}$ .  
**פתרון:** ת"ח כי  $g_1^n, g_2^n \in H$  אזי  $g_1^n (g_2^n)^{-1} = g_1^n (g_2^{-1})^n = (g_1 g_2^{-1})^n \in H$   
כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש  $H$  חילופית. בנוסף  $e^n = e \in H$

(ו)  $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$  **פתרון:** נחשב מפורש  $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 0, 3^2 = 1$   
ולכן  $0, 3^2 = 1$

$$H = \{0, 1\}$$

ולכן  $H$  אינה תת חבורה כי  $1 + 1 = 2 \notin H$  ואין סגירות לחיבור

(ז)  $H = \{x^3 | x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5$   
**פתרון :** נחשב מפורש  $0^3 = 0, 1^3 = 1, 2^3 = 3, 3^3 = 2, 4^3 = 4$  ולכן

$$H = \{0, 1, 3, 2, 4\}$$

כלומר  $H$  שווה לכל  $\mathbb{Z}_5$  ולכן תת חבורה.

(ח)  $H = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \frac{b}{4} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$   
**פתרון :** זוהי תת חבורה כי  $H$  אינה ריקה. בנוסף:

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{b'a - ba'}{bb'}$$

עבור  $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in H$  נקבל ש  $4$  מחלק את  $b, b'$  ובפרט את  $bb'$  ולכן גם

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{b'a - ba'}{bb'} \in H$$

2. תהא  $G$  עם  $n > 2$  איברים. הוכח כי לא קיימת  $H \leq G$  עם  $n - 1$  איברים.

**פתרון :** נניח בשלילה כי קיימת  $H \leq G$  עם  $n - 1$  איברים. אזי קיים איבר יחיד  $g \in G \setminus H$ .

כיוון שב  $H$  יש לפחות 2 איברים אזי קיים  $e \neq h \in H$ . בנוסף  $gh \in H$  כי  $gh \neq g$ . אבל  $H$  ת"ח ולכן קיים  $h^{-1} \in H$  וגם מתקיים סגירות  $g = (gh)h^{-1} \in H$ . סתירה

3. תהא  $G$  חבורה  $H_1, H_2 \leq G$  הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$

**פתרון :** הכיוון  $(\Rightarrow)$  טריוואלי. נוכיח את הכיוון  $(\Leftarrow)$ : נניח בשלילה כי  $[H_1 \cup H_2 \leq G]$  אבל  $H_1 \not\subseteq H_2 \wedge H_2 \not\subseteq H_1$

אזי קיימים  $h_1 \in H_1 \setminus H_2, h_2 \in H_2 \setminus H_1$ . כיוון ש  $h_1, h_2 \in H_1 \cup H_2$  אזי גם  $h_1 + h_2 \in H_1 \cup H_2$  כי מניחים כי זוהי ת"ח.

כעת מהגדרת איחוד נובע כי  $h_1 + h_2 \in H_1$  או  $h_1 + h_2 \in H_2$ . בה"כ  $h_1 + h_2 \in H_1$  כי  $h_1 \in H_1$  אזי גם  $-h_1 \in H_1$  ואז  $h_2 = (h_1 + h_2) + (-h_1) \in H_1$  כי  $h_2 \in H_1$  סתירה לכך ש  $h_2 \notin H_1$ . חבורה.