<u>מבנים דיסקרטיים - תרגול 3</u>

<u>תרגיל:</u>

האם קיימת אגודה (חבורה למחצה) שיש בה איבר יחידה משמאל אך אין איבר יחידה מימין?

<u>פתרון:</u>

כן. נתבונן ב- $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$. קל לראות ש- $e'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ הוא איבר יחידה משמאל.
נראה שאין איבר יחידה מימין. נניח בשלילה שקיים $u=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כך שלכל $s=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in S$ מתקיים $su=s$. בפרט זה אמור להתקיים ל- $s=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. אך $su=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $x=1\wedge y=b$
, ומכיון שזה אמור להתקיים לכל $b\in\mathbb{R}$, קל לראות שאין איבר יחידה מימין.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו כי לכל מונואיד $(X,\cdot)$ הקבוצה $P_*(X)$ (אוסף כל תתי הקבוצות הלא ריקות של X) מגדירה מונואיד ביחס לפעולת הכפל הטבעית: $A\bullet B=\{a\cdot b:\ a\in A, b\in B\}$. מיהם האיברים ההפיכים ב-$(P_*(X),\bullet)$?

<u>פתרון:</u>

$P_*(X)$ קבוצה לא ריקה, לדוגמא $\{e\}$ איבר שלה, (e ניטרלי של X).

הפעולה מוגדרת היטב וסגורה ב- $P_*(X)$.

קל לבדוק את <u>האסוציאטיביות</u> שמתבססת על האסוציאטיביות של הפעולה ב- X .

<u>איבר הניטרלי</u> $\{e\}$.

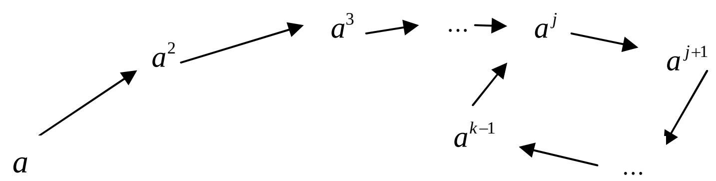
האיברים ההפיכים של המונואיד $P_*(X)$: קבוצות מהצורה $\{a\}$ עבור a הפיך ב- X .

אכן, נניח ש-$A\in P_*(X)$ הפיך. לכן קיימת $B\in P_*(X)$ כך ש- $\forall a\in A, \forall b\in B$ מתקיים $ab=e$. נראה ש-$|B|=1$. אחרת קיימים לפחות שני איברים $b_1,b_2\in B$ ומתקיים $ab_1=ab_2=e$ ולכן (מיחידות ההופכי) $b_1=b_2$. באופן סימטרי $|A|=1$.

<u>הגדרה:</u> מונואיד M הוא בעל <u>צמצום משמאל</u> אם $\forall a,b,c \in M,\ ab = ac \Rightarrow b = c$. בצורה דומה מגדירים בעל צמצום מימין/בעל צמצום.

<u>טענה:</u> מונואיד סופי M בעל צמצום משמאל הוא חבורה.

<u>הוכחה:</u> כנ"ל צ"ל שלכל איבר קים איבר הפכי. ניצור סדרה של חזקות $a, a^2, a^3, a^4, ...$ עבור איבר $e \neq a \in M$. כיוון שהמונואיד סופי, קיימות שתי חזקות $j < k$ כך ש $a^j = a^k$. נמחיש זאת בעזרת הציור הבא (כל חץ מייצג הכפלה ב a):



כעת $a^j a^{k-j} = a^{j+(k-j)} = a^j = a^j e$. לפי תכונת הצמצום, נקבל $e = a^{k-j}$. כעת כיוון ש $k > j$ נקבל $k - j \geq 1$, כיוון ש $e \neq a$ בהכרח $k - j \geq 2$. לכן נקבל ש $e = a^{k-j-1}a = aa^{k-j-1}$. כלומר $a^{-1} = a^{j-k-1}$.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו או הפריכו: כל מונואיד קומוטטיבי בעל תכונת הצמצום הוא חבורה.

<u>פתרון:</u>

הפרכה: $\mathbb{N} \cup \{0\}$ עם פעולת החיבור.

<u>תרגיל:</u>

1. אם A אגודה סופית, אזי קיים $a \in A$ כך ש $a^2 = a$.
2. הראו שזה לאו דוקא נכון אם A אגודה אינסופית.
3. אם A חבורה אזי $a^2 = a \Rightarrow a = e$.

<u>פתרון:</u>

1. בדומה להוכחה ב' בתרגיל הקודם, נבנה סדרה של חזקות עבור $a \in A$: $a, a^2, a^3, a^4, ...$. כיוון שהאגודה סופית, נקבל שבהכרח קיימות שתי חזקות $j < k$ כך ש $a^j = a^k$. נטען שניתן להניח שמתקיים $k \geq 2j$, כיוון שלכל $t \geq 0$ מתקיים (באינדוקציה על t):
$a^{k+t(k-j)} = a^k a^{t(k-j)} = a^k a^{k-j} a^{(t-1)(k-j)} = a^j a^{k-j} a^{(t-1)(k-j)} = a^k a^{(t-1)(k-j)} = ... = a^k$.
ולכן ניתן להגדיל את k כרצוננו. כעת נשים לב ש $a^{j+i} = a^j a^i = a^k a^i = a^{k+i}$. נמצא i מתאים כך שיתקיים: $2(j+i) = k+i$. מכאן ש $i = k - 2j$.

2. לדוגמא ב $(\mathbb{N},+)$ הטענה לא מתקיימת. $2a = a \Rightarrow a = 0 \notin \mathbb{N}$.
3. מכפילים בהפכי של a בשני האגפים.

<u>הגדרה:</u>

- <u>סדר של חבורה</u> הוא מספר האיברים בחבורה, ונסמנו $|G|$.
  למשל: $|\mathbb{Z}_6| = 6, |\mathbb{Z}| = \infty$.
- <u>סדר של איבר</u> $a \in G$ הוא $\min\{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}$ ונסמנו ב- $o(a)$ (הסימון בחוברת $ord(x)$). אם אין n כזה – נאמר שהסדר של האיבר הוא אינסוף.
  [שימו לב שהסדר של איבר היחידה הוא תמיד 1.]

<u>תרגיל:</u> תהי $GL_2(\mathbb{R})$ - חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2x2 עם ערכים ב $\mathbb{R}$. מצאו את הסדר של $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ($\det(B) = 1$ ולכן $B \in GL_2(\mathbb{R})$):

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
$$\Rightarrow \ o(B) = 3$$

<u>תרגיל:</u>

תהי G חבורה ויהיו $a,b \in G$. אם a,b מסדר סופי, האם גם ab מסדר סופי?

<u>פתרון:</u>

תלוי בחבורה. נסמן $o(a)=n, o(b)=m$ ונתבונן בשני מקרים:

א. G אבלית: מתקיים
$(ab)^{mn}=ab\cdot ab\cdot\ldots\cdot ab=a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot b\cdot b\ldots\cdot b=a^{mn}\cdot b^{mn}=\left(a^n\right)^m\left(b^m\right)^n=e$.
לכן $o(ab)\le mn$ ובפרט סופי.

ב. G אינה אבלית: נמצא דוגמא נגדית. תהי $G=\left(GL_n(\mathbb{R}),\cdot\right)$ ונתבונן בשני אברים:
$a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$. ניתן לבדוק שמתקיים $a^4=b^3=I$. עם זאת $ab=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
אינו מסדר סופי, שכן מתקיים $(ab)^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$. מש"ל

<u>תרגיל:</u> תהי $G=\mathbb{Z}_{12}$. מהו הסדר של 3,8,5?

<u>פתרון:</u> $<3>=\{3,6,9,0\}$ ולכן $|3|=4$.

$<8>=<8,4,0>$ ולכן $|8|=3$.

$<5>=<5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7,0>$ ולכן $|5|=12$.

<u>תרגיל:</u> תהי G חבורה מסדר זוגי. הוכיחו שקיים איבר מסדר 2 ב G.

<u>הוכחה:</u> נבחר צמדים ב G כל צמד יהיה מורכב מאיבר והופכי שלו (לכל איבר ב G קיים הופכי והוא יחידי) מכיוון שסדר החבורה זוגי ול e אין הופכי אז ישאר איבר בודד (לפחות 1) שלו לא יהיה זוג ($a\in G$) כלומר אין לו הופכי בכל שאר אברי החבורה, אבל מכיוון שהוא בחבורה קיים לא הופכי ונשאר שהוא הופכי לעצמו כלומר $a^2=e$ ולכן $O(a)=2$ □

<u>תרגיל:</u> אם $g^n=e$ אזי $o(g)\,|\,n$.

<u>הוכחה:</u> ברור ש $o(g)\le n$. נבצע חלוקה עם שארית $n=o(g)q+r$ כאשר $0\le r<o(g)$, ונקבל $e=g^n=g^{o(g)q+r}=(g^{o(g)})^q g^r=g^r$. הדרך היחידה שזה יכול לקרות היא אם $r=0$.