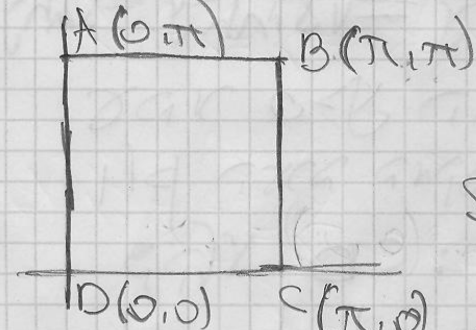
1

על פי נוסח לעקרון המקסימום: אם f היא פונקציה אנליטית בתחום D אז המקסימום של $|f|$ מתקבל על שפת D ואם f מקבלת את המקסימום בנקודה פנימית ב-D אז f קבועה.

דוגמא: יהי Z הריבוע הסגור $\{z \mid 0 \le \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z \le \pi\}$

נחשב את הערך המקסימלי של $f(z) = \sin z$ בריבוע Z. לפי עקרון המקסימום הערך המקסימלי של $|f(z)| = |\sin z|$ מתקבל על שפת הריבוע. נחשב את הערך המקסימלי של $|\sin z|$ על כל אחד מהקטעים AB, BC, CD ו-DA.



לכל $z = x+iy$ מתקיים

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right)$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

ולכן

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + (\cos^2 x + \sin^2 x)\sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x + \sinh^2 y$$

ולכן $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

(2) על הקטע AB: $z=x+i\pi$ $0\le x\le\pi$ ולכן

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2\pi}\le\sqrt{1+\sinh^2\pi}$$

ועבור $x=\frac{\pi}{2}$ מקבלים $|\sin z|=\sqrt{1+\sinh^2\pi}$

לכן הערך המקסימלי של $|\sin z|$ על AB הוא $\sqrt{1+\sinh^2\pi}$. הקטע BC: $z=\pi+iy$ $0\le y\le\pi$

ומכאן

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2\pi+\sinh^2 y}=\sqrt{\sinh^2 y}=\sinh y$$

עבור $0\le y$ הפונ' $\sinh y$ מונוטונית עולה

ולכן הערך המקסימלי בקטע BC הוא $\sinh\pi$.

בקטע CD: $z=x$ $0\le x\le\pi$ ולכן

$|\sin z|=|\sin x|$ והערך המקסימלי של $|\sin z|$ מתקבל בנקודה $z=\frac{\pi}{2}$ ושווה ל-1.

בקטע DA: $z=iy$, $0\le y\le\pi$ ולכן

$|\sin z|=\sinh y$ ומכאן עולה (בדיוק כמו בקטע BC) כי הערך המקסימלי של $|\sin z|$ על DA שווה ל- $\sinh\pi$.

כיוון ש- $\sinh\pi<\sqrt{1+\sinh^2\pi}=\cosh\pi$

ו- $1<\sqrt{1+\sinh^2\pi}$

(3) נמצא ספירה המקסימלי של $\sin z$ במישור
עבור שווה ל- $i\,h z \cos$.

<u>הגדרה:</u> פונקציה מרוכבת f נקראת חסומה אם קיים $M>0$ כך ש- $|f(z)|\le M$ לכל z מרוכב. לכן פונקציה חסומה צריכה להיות חסומה על כל המישור ולא רק על אחד מהישרים, לדוגמא הפונ' $f(z)=\sin z$ חסומה על כל הציר הממשי $|f(x)|=|\sin x|\le 1$

אבל $|f(iy)|=\left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right|\xrightarrow[y\to\infty]{}\infty$ ולכן הפונ'

$f(z)=e^{z}$ חסומה על הציר המדומה כי

$|f(iy)|=|e^{iy}|=1$ אבל $|f(x)|=e^{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$

<u>3ב)</u> הוכיחו כי לא קיימת פונקציה שלמה f המקיימת $|f(z)|=e^{|z|}-|z|-\frac{1}{2}$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

<u>פתרון:</u> f אינה חסומה מלמעלה אבל כן חסומה מלרע, כי אם נגדיר $g(x)=e^{x}-x-\frac{1}{2}$

אז $g'(x)=e^{x}-1\ge 0$ ו- $g(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

לכל $x\ge 0$ ולכן g פונקציה מונוטונית עולה

ולכן $g(x)\ge\frac{1}{2}$ לכל $x\ge 0$.

(4) מכאן נקבל ש- $|f(z)| \ge \frac{1}{2}$ לכל $z\in\mathbb{C}$

לכן הפונ' $h(z)=\frac{1}{f(z)}$ היא פונקציה שלמה

(כי $f(z)\neq 0$) וחסומה מעל' $|h(z)|=\frac{1}{|f(z)|}\le 2$

לכן h קבועה ולכן f קבועה. אבל זה

לא נכון כי $|f(0)|=\frac{1}{2}$ ו- $|f(1)|=e-\frac{3}{2}$

ולכן $|f(0)|\neq|f(1)|$.

<u>בונוס:</u> תהי $f(z)=u(z)+iv(z)$ פונ' שלמה

א. הוכיחו כי אם $u(z)\ge 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז f פונ' קבועה.

ב. הוכיחו כי אם $u(z)\ge v(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז f היא פונ' קבועה.

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר את הפונ' $h(z)=e^{-f(z)}$ אז

$|h(z)|=|e^{-u(z)-iv(z)}|=e^{-u(z)}$ כיוון ש- $u(z)\ge 0$

נקבל ש- $|h(z)|\le 1$ ולכן h קבועה ולכן

גם f קבועה.

(5) ה. נגדיר את הפונקציה השלמה $g(z)=(1+i)f(z)$

$= (1+i)(u(z)+iv(z)) = u(z)-v(z)+i(u(z)+v(z))$

לכן $c \geq Re(g(z))$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ולפי ה

נקבל ש-g קבועה ולכן גם f קבועה