תרגיל 8

8 ביוני 2017

1. נתבונן בשלושת המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=1\right\} \\ Y &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2+y^2=1\right\} \\ Z &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\} \end{aligned}$$

ראיתם בתירגול כי Z אינו הומואומרפי ל X. האם Yהומואומורפי ל X או ל Z? הוכיחו תשובתכם.

2. תהא $X\neq\emptyset$ עם הטופולוגיה הקו־סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? [רמז: תלוי בעוצמה של X]

3. תזכורת: הישר של של סורגנפריי־ נסמן ב־ $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T המוגדרת כך: $O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

   (א) הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים. כלומר הראו שאם A תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת אזי A אינו קשיר.

   (ב) מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם אינן רציפות.

4. הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומואומורפי ל $\mathbb{R}^n$ לכל $1<n$.

5. יהא $A\subseteq\mathbb{R}$. הוכיחו כי אם A צפוף ב $\mathbb{R}$ וגם $A\neq\mathbb{R}$ אז A אינו קשיר.

6. יהא (X,τ)מרחב טופולוגי ויהי $A\subseteq X$ תת מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת מרחב $B\subseteq X$ המקיים $A\subseteq B\subseteq cl(A)$ אז B קשיר.

7. יהא (X,τ)מרחב טופולוגי ויהי $A.B\subseteq X$ כך ש A קשיר ו B סגוחה המקיימים $A\cap B\neq\emptyset$. הוכיחו כי $A\subseteq B$.

8. יהא (X,τ)מרחב טופולוגי ויהי $A.B \subseteq X$ סגורות. נניח כי $A \cup B, A \cap B$ קשירים. הוכיחו כי A, B קשירים. הדרכה: מ"ל A קשיר שכן ההוכחה ש B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה כי $A = U \cup V$ כאשר U, V סגורות...