תרגול 9

1 באוגוסט 2021

1 המשך מרחבי המטריצה

1. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימות: $rank(A) + rank(B) > n$. הוכיחו: $AB \neq 0$.
פתרון: טענת עזר: $C(B) \subseteq N(A) \iff AB = 0$.
$\Leftarrow$: מכיון ש־ $C(B) \subseteq N(A)$ נקבל בפרט ש־ $\forall 1 \leq i \leq n : C_i(B) \in N(A) \Rightarrow$ $A \cdot C_i(B) = 0$. כעת נשים לב, לפי כפל עמודה:

$$\forall 1 \leq i \leq n : C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = 0$$

ולכן: $AB = 0$ (כי כל העמודות הם 0).
$\Rightarrow$: נתון ש־ $AB = 0$. כדי להוכיח $C(B) \subseteq N(A)$ מספיק להוכיח: $\forall 1 \leq i \leq n :$ $C_i(B) \in N(A)$ (כי $C(B) = span\{C_i(B)\}$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את עמודות B, ולכן אם $N(A)$ גם מכיל אותן, אז הוא מכיל את הספאן שלהם). אכן:

$$\forall 1 \leq i \leq n : A \cdot C_i(B) = C_i(AB) = C_i(0) = 0$$

כעת, לשאלה שלנו: נניח בשלילה $AB = 0$, אז לפי טענת העזר $C(B) \subseteq N(A)$. כעת, לפי משפט הדרגה מתקיים:

$$n = rank(A) + \dim N(A) \geq rank(A) + \dim C(B) = rank(A) + rank(B) > n$$

קיבלנו $n > n$ בסתירה. לכן $AB \neq 0$.

2. הוכיחו: כל מטריצה לא ריבועית איננה הפיכה.
פתרון: הכוונה: תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ כך ש־ $m \neq n$, צריך להוכיח: לא קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ כך ש־

$$AB = I_m \wedge BA = I_n$$

ראיתם בהרצאה. הסבר בזריזות: בה"כ $m < n$. לכן $rank(A) \leq m$, ומכאן $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times m} : rank(BA) \leq rank(A) \leq m < n$ ולכן $BA \neq I_n$ המקיימת $rank(I_n) = n$.

3. תהא $A=\begin{pmatrix}1&1&*\\1&*&1\\*&1&1\end{pmatrix}$, כך שקיימים 2 פתרונות בת"ל למערכת $Ax=0$. מצאו את A.

פתרון: מכיון שיש 2 פתרונות בת"ל אז $\dim N(A)\geq 2$, אבל מכיון שמדובר במטריצות 3×3 אז $A\neq 0\iff \dim N(A)<3$, ולכן אצלנו בסה"כ: $\dim N(A)=2$. ולכן $rank(A)=1$, ולכן השורות תלויות לינארית אחת בשנייה, ובפרט

$$\begin{pmatrix}1\\1\\*\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\*\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow *=1$$

4. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו:

(א) $rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B)$

(ב) $rank(A-B)\geq|rank(A)-rank(B)|$

פתרון: א. נוכיח: $R(A+B)\subseteq R(A)+R(B)$. מספיק להראות:

$$\forall 1\leq i\leq m: R_i(A+B)\in R(A)+R(B)$$

כי אז:

$$R(A+B)=span\{R_i(A+B)\}\subseteq R(A)+R(B)$$

ואכן:

$$\forall 1\leq i\leq m: R_i(A+B)=R_i(A)+R_i(B)\in R(A)+R(B)$$

מש"ל.

ב. שימו לב שמתקיים: $A=A-B+B$, ולכן:

$$rank(A)=rank(A-B+B)\leq rank(A-B)+rank(B)$$

ומכאן נקבל:

$$rank(A-B)\geq rank(A)-rank(B)$$

בנוסף: $B=B-A+A$, ולכן:

$$rank(B)=rank(B-A+A)\leq rank(B-A)+rank(A)$$

ומכאן:

$$rank(A-B) = rank(B-A) \geq rank(B) - rank(A)$$

ובסה"כ משני האי־שיוויונים נקבל:

$$rank(A-B) \geq |rank(A) - rank(B)|$$

5. תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$. הוכיחו: אם עמודות AB בת"ל אז עמודות B בת"ל.
פתרון: ראשית, $AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$. ולכן, אם כל העמודות של AB בת"ל, נקבל $rank(AB) = p$. בנוסף:

$$p = rank(AB) \leq rank(B) \leq p$$

ולכן:

$$rank(B) = p$$

מה שאומר שעמודותיה בת"ל (כי יש לה p עמודות).

2 העתקות לינאריות

2.1 הגדרה

העתקה לינארית היא פונקציה $T : V \to W$ (כאשר V, W מ"ו) המקיימת:

- $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V : T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$
- מתקיים: $T(0_V) = 0_W$ (אפשר פשוט לרשום $0_V \mapsto 0_W$).

תרגילים:

1. האם הפונקציות הבאות הע"ל. אם כן מצאו גרעין ותמונה:

(א) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix}$?

פתרון:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2\cdot 0-0 \\ 0+2\cdot 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

יהיו $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$T\left(\alpha v_1 + v_2\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x + a \\ \alpha y + b \\ \alpha z + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + a + 2(\alpha y + b) - \alpha z - c \\ \alpha z + c + 2(\alpha y + b) - \alpha x - a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x+2y-z) + a + 2b - c \\ \alpha(z+2y-z) + c + 2b - a \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2b-c \\ c+2b-a \end{pmatrix} = \alpha T v_1 + T v_2$$

נמצא גרעין:

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$N\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא את התמונה:

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3, Tv = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} =$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= C\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך שלאחר דירוג יש 2 משתנים מובילים, מה שאומר שיש 2 וקטורים בבסיס, והם כמובן פורשים את כל $\mathbb{R}^2$.

הערה: ראינו כאן דוגמא למשפט הבא: אם $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ מוגדרת ע"י כפל במטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אז: $\ker T = N(A), Im(T) = C(A)$.

(ב) $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n+2}[x]$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=x\cdot p(x)$.
פתרון:

$$T(0)=x\cdot 0=0$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},p,q\in\mathbb{R}_n[x]:T(\alpha p+q)=x(\alpha p+q)=$$

$$\alpha xp+xq=\alpha T(p)+T(q)$$

נמצא גרעין:

$$\ker T=\{p\in\mathbb{R}_n[x]\mid T(p)=0\}=\{p\in\mathbb{R}_n[x]\mid xp=0\}=\{0\}$$

נמצא תמונה:

$$Im(T)=\{xp\mid p\in\mathbb{R}_n[x]\}=\{p\in\mathbb{R}_{n+2}[x]\mid 1\leq\deg(p)\leq n+1\}\cup\{0\}=$$

$$=span\{e_2,\dots,e_{n+2}\}=span\{x,x^2,\dots,x^{n+1}\}$$

(ג) $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $T(A)=tr(A)$.
פתרון: כמובן $T(0)=tr(0)=0$. בנוסף, עבור $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},\alpha\in\mathbb{F}$ נקבל:

$$T(\alpha A+B)=tr(\alpha A+B)=\alpha tr(A)+tr(B)=\alpha T(A)+T(B)$$

כאשר השתמשנו בחוקי העקבה שנלמדו.
נמצא גרעין, או יותר נכון בסיס לגרעין: נסמן ב־ $E_{i,j}$ את המטריצה המקיימת:

$$(E_{i,j})_{k,l}=\begin{cases}1 & (k,l)=(i,j)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

למשל

$$E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת נוכל לקחת את כל המטריצות שעל האלכסון יש 0, והן נפרשות ע"י המטריצות הבאות:

$$\{E_{i,j}\mid i\neq j\}$$

כמה כאלה יש? n^2-n. בנוסף, נוכל לקחת מטריצות שכן יש על האלכסון, והאחרון הוא מינוס סכום הראשונים, ואלה נפרשות ע"י

$$\{E_{i,i}-E_{n,n} \mid 1\leq i\leq n-1\}$$

בסה"כ יש $n-1$ כאלה, וקיבלנו בסה"כ מימד הגרעין הוא n^2-1.
לגבי התמונה, כמובן $Im(T)=\mathbb{F}$ כי לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ המטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת:

$$(A)_{i,j}=\begin{cases}\alpha & i=j=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

נקבל:

$$T(A)=\alpha$$

הערה: קיבלנו: מימד הגרעין + מימד התמונה = מימד התחום. (שדה הוא תמיד מרחב וקטורי מעל עצמו, עם מימד 1).

(ד) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_1[x]$ המוגדרת ע"י: $T(ax^2+bx+c)=a^2x+b$.
פתרון: $T(0)=0$. לא מרחב וקטורי כי למשל:

$$T(5x^2+3x^2)=T(8x^2)=64x$$

ואילו:

$$T(5x^2)=25x, T(3x^2)=9x\Rightarrow T(5x^2)+T(3x^2)=34x\neq 64x$$

(ה) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י: $T\left(p(x)\right)=p(x+2)$.
פתרון:

$$T(0x^2+0x+0)=0(x+2)^2+0(x+2)+0=0$$

$$T((\alpha a+a')x^2+(\alpha b+b')x+\alpha c+c')=(\alpha a+a')(x+2)^2+(\alpha b+b')(x+2)+\alpha c+c'=$$

$$\alpha\left(a(x+2)^2+b(x+2)+c\right)+a'(x+2)^2+b'(x+2)c'=\alpha T(ax^2+bx+c)+T(a'x^2+b'x+c')$$

(ו) $T:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת ע"י $T(A)=A^t$.

פתרון: חוקי השחלוף בדיוק אומרים שזו הע"ל:

$$T(0)=0$$

$$T(\alpha A+B)=(\alpha A+B)^t=\alpha A^t+B^t$$

(ז) $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ המוגדרת ע"י $T(A)=A+I$.

פתרון:

$$T(0)=0+I=I\neq 0$$

ולכן לא הע"ל.

(ח) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=p(x)+2$ לא הע"ל כי:

$$T(0)=0+2=2\neq 0$$