פתרון תרגיל בית 10 – טופולוגיה

שאלה 1

א) יהיו X_1,X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-$X_1\times X_2\cong X_2\times X_1$.

ב) יהי $\left(X,\tau_{cof}\right)$ מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקוסופית. נסמן ב-τ את טופולוגיית המכפלה על $X\times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקוסופית על $X\times X$? הוכיחו או הפריכו!

פתרון

א) נגדיר פונקציה $f:X_1\times X_2\to X_2\times X_1$ על-ידי $f\left(a,b\right)=\left(b,a\right)$. נוכיח שהיא רציפה. זוהי פונקציה לתוך מרחב מכפלה ולכן מספיק לבדוק רציפות בכל רכיב.
כלומר, רציפות של הפונקציות $p_1\circ f$, $p_2\circ f$ כאשר
$p_1:X_2\times X_1\to X_2$; $p_2:X_2\times X_1\to X_1$. מתקיים:
$p_1\circ f:X_1\times X_2\to X_2$, $p_2\circ f:X_1\times X_2\to X_1$ ואלה למעשה פונקציות ההטלה על הרכיבים המתאימים (וידוע שהן רציפות).
ההופכית של f היא: $g:X_2\times X_1\to X_1\times X_2$ $g\left(a,b\right)=\left(b,a\right)$ וניתן להראות שהיא רציפה (באופן דומה).
לכן f הומיאומורפיזם.

ב) הפרכה- עבור $a\in X$ כלשהו נתבונן ב-$X\times\{a\}\subseteq X\times X$. אזי $X\times\{a\}$ סגורה בטופולוגיית המכפלה שכן $\left(X\times\{a\}\right)^C=X\times\left(X\setminus\{a\}\right)$ וברור ש $X,\left(X\setminus\{a\}\right)$ פתוחות ב-$\left(X,\tau_{cof}\right)$. מצד שני הקבוצה $X\times\{a\}$ אינה סגורה בטופולוגיה הקו-סופית על $X\times X$ שכן היא לא כל המרחב ואינה סופית.

שאלה 2

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית.

הוכיחו: כל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הראו שמרכיבי הקשירות המסילתית מתלכדים עם מרכיבי הקשירות ולכן גם סגורים.

<u>פתרון</u>

יהי C מרכיב קשירות מסילתית. נרצה להראות שזו קבוצה פתוחה. יהי $x\in C$ ונראה שקיימת סביבה U של x כך ש- $x\in U\subseteq C$. לפי הנתון קיימת סביבה קשירה מסילתית V של x. נרצה להראות שזו הסביבה הדרושה. נותר להראות ש- $V\subseteq C$ אך זה נובע מההגדרה של מרכיבי הקשירות המסילתיים (מדוע?).

כעת נראה שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

נציג שתי דרכים:

<u>דרך א'</u>

יהי C מרכיב קשירות מסילתית. הוא קשיר ולכן מוכל במרכיב קשירות כלשהו D. כל מרכיב קשירות מתפרק לאיחוד זר של מרכיבי קשירות מסילתית. נניח בשלילה שיש יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד ב- D. נסמן $D=\bigcup_i C_i$ כאשר אחד מה- C_i הוא C.

כעת, מכיון שכל מרכיב קשירות מסילתית פתוח, נקבל ש- $D\setminus C$ פתוח (כאיחוד של פתוחים) ולכן C סגור ב- D.

כלומר, מצאנו ב- D קבוצה סגוחה לא טריוויאלית בסתירה לקשירות של D. לכן יש ב- D רק מרכיב קשירות מסילתית אחד, ולכן $D=C$. אך מרכיבי הקשירות הם סגורים ולכן C סגור.

<u>דרך ב'</u>

יהי $P=\{P_i : i\in I\}$ אוסף מרכיבי הקשירות המסילתית של X. יהי P_{i_0} אחד ממרכיבי הקשירות המסילתית. נראה שהוא סגור. מתקיים $X=\bigcup_{i\in I}P_i=P_{i_0}\cup\left(\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}}P_i\right)$ (שימו לב

שזהו איחוד זר!). מכיוון שמרכיבי הקשירות המסילתית הם פתוחים, נקבל ש- $\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} P_i$

פתוחה ולכן P_{i_0} סגורה (כמשלים של פתוחה).

<u>שאלה 3</u>

יהיו (X_i,τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i\in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי?

<u>רמז</u>: תלוי.

<u>פתרון</u>

<u>מקרה ראשון</u>: באוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת.

כלומר, הקבוצה $J=\{i\in I: |X_i|>1\}$ אינסופית.

במקרה זה $X=\prod_{i\in I} X_i$ אינו דיסקרטי. נראה שלמעשה אף נקודון אינו פתוח. נניח בשלילה

שקיים נקודון $\{x\}\subseteq X$ פתוח. אם הוא פתוח, אזי ניתן לבטא אותו כאיחוד של קבוצות

בסיסיות. מכיוון ש- $|\{x\}|=1$, ניתן להסיק שקיימת B בסיסית כך ש- $B=\{x\}$.

נגדיר תת-קבוצה של I: $F=\{i\in I: p_i(B)\neq X_i\}$. מהגדרת טופולוגיית המכפלה נקבל ש-

F סופית. כעת נתבונן ב- $J-F=\{i\in I: p_i(B)=X_i \wedge |X_i|>1\}$, זו קבוצה אינסופית בהכרח.

בפרט, נקבל שקיים $i_0\in I$ כך ש- $p_{i_0}(B)=X_{i_0}$ וכן $|X_{i_0}|>1$, בסתירה לכך ש- $|p_{i_0}(B)|=1$.

<u>מקרה שני</u>: באוסף $\{X_i\}$ יש לכל היותר מספר סופי של אינדקסים כך שבמרחב X_i יש

יותר מנקודה אחת. במקרה זה כל נקודון ב- X הוא קבוצה בסיסית (הסבר: לכל $i\in I$,

פרט למספר סופי, $p_i(\{x\})=X_i$). לכן, במקרה זה X הינו דיסקרטי.

<u>שאלה 4</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d: X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.

<u>פתרון</u>

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה $X\times X$ הוא מטריזבילי, לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה $d_{\max}$, כלומר מהמטריקה $d_{\max}:(X\times X)\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d_{\max}((x,y),(t,s))=\max\{d(x,t),d(y,s)\}$. נראה שהפונקציה רציפה לפי $d_{\max}$ ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה (x,y). צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}((x,y),(t,s))<\delta$ אז $|d(x,y)-d(t,s)|$.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. אזי אם $d_{\max}((x,y),(t,s))<\delta$ מתקיים

$$|d(x,y)-d(t,s)|\le d(x,t)+d(y,s)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

שימו לב: אי השוויון $|d(x,y)-d(t,s)|\le d(x,t)+d(y,s)$ נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה d (איך?).

<u>שאלה 5</u>

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i\in I}X$. לכל $x\in X$ נגדיר $f_x\in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x. נסמן $Y=\{f_x\mid x\in X\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I. הוכיחו כי

X הומיאומורפי ל Y.

<u>פתרון</u>

תהי $g:X\to Y$ מוגדרת ע"י $g(x)=f_x$. פונקציה זו רציפה שכן מתקבלת כצמצום הטווח של הפונקציה הרציפה $g:X\to\prod_{i\in I}X$ (המוגדרת על-ידי $g(x)=f_x$). אכן, הפונקציה האחרונה רציפה לפי קריטריון לרציפות פונקציה לתוך מרחב מכפלה, שכן היא רציפה רכיב-רכיב (בכל רכיב מדובר בפונקציית הזהות). תזכורת: $g:X\to\prod_{i\in I}X$ רציפה אם ורק אם $p_i\circ g:X\to X$ רציפה לכל $i\in I$. אבל לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g(x)=p_i(f_x)=x$ כלומר לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g=Id_X$ ופונקציית הזהות כמובן רציפה ממ"ט לעצמו.

נקבע $i_0\in I$. קל לראות שההופכית של $g:X\to Y$ היא הפונקציה $p_{i_0}:Y\to X$ שמתקבלת מצמצום התחום של פונקציית ההטלה הרציפה $p_{i_0}:\prod_{i\in I}X\to X$. לכן נקבל ש- g הוא הומיאומורפיזם מ- X ל- Y.

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1.

<u>פתרון</u>

נניח שלכל $i\in I$ X_i הוא מרחב T_1 ונוכיח ש- $\prod_{i\in I}X_i$ הוא מרחב T_1. שקול להוכיח שכל נקודון סגור ב- $\prod_{i\in I}X_i$.

יהי $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ נקודון. נראה שהמשלים שלו פתוח. מתקיים: $\left(\prod_{i\in I}\{x_i\}\right)^C=\bigcup_{i\in I}\prod_{j\in I}Y_{j,i}$ כאשר

$$Y_{j,i}=\begin{cases}X_j & j\neq i\\ X_j\setminus\{x_j\} & j=i\end{cases}.$$

<u>הערה</u>: כדי להבין טוב יותר את החישוב הנ"ל התבוננו במכפלה סופית ושכנעו את עצמכם שזוהי הצורה הכללית של המשלים של נקודון במרחב מכפלה.

כעת, מכיון שכל המרחבים הנתונים הם T_1 אז בהכרח לכל $i, j \in I$ מתקיים ש- $Y_{j,i}$ פתוחה ב- X_j

. מכאן, לכל $i \in I$ $\prod_{j \in I} Y_{j,i}$ פתוחה בסיסית במרחב המכפלה ולכן $\left(\prod_{i \in I} \{x_i\} \right)^C = \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} Y_{j,i}$

פתוחה כאיחוד של פתוחות.